

## 基于波形频域匹配的激光足印定位方法

周思寒<sup>1</sup>, 赵朴凡<sup>2</sup>, 韩启金<sup>3</sup>, 栾超<sup>4</sup>, 杨坚<sup>1</sup>, 王恒<sup>1</sup>, 马跃<sup>1</sup>, 周辉<sup>1</sup>, 李松<sup>1,5\*</sup>

1. 武汉大学电子信息学院, 湖北武汉 430072;
2. 武汉大学卫星导航定位技术研究中心, 湖北武汉 430079;
3. 中国资源卫星应用中心, 北京 100094;
4. 北京控制与电子技术研究所, 北京 100045;
5. 武汉量子技术研究院, 湖北武汉 430010)

**摘要:** 国产线性体制星载激光测高仪主要用于为影像提供高程控制点。在卫星运行过程中受环境变化的影响导致激光指向偏移, 足印定位误差增大, 直接降低了控制点高程精度。这种影响在复杂山地尤为明显。为了提高星载激光测高仪观测成果在复杂山地的可用性, 提出一种基于波形频域匹配的激光足印定位方法: 利用高精度的地形数据进行波形仿真, 由计算仿真波形与国产高分系列卫星接收波形在频域的相关性确定激光足印的位置; 由多足印频域匹配的联合计算, 得到激光指向的系统偏差。在美国蒙大拿州中部、怀俄明州西部、犹他州东部三个区域进行的实验结果表明, 该方法获得的足印平面偏移距离标准差、平面正北夹角标准差、等效激光指向偏离角度标准差等均优于时域波形匹配方法, 证明了基于波形的频域匹配方法在足印高精度定位方面具有优势, 为提高卫星激光测高仪观测成果在复杂山地的可用性、以及利用波形匹配实施对卫星激光测高仪指向误差校正奠定了基础。

**关键词:** 星载激光测高仪; 频域匹配; 国产高分系列卫星; 足印定位; 指向误差校正

**中图分类号:** TP733

**文献标识码:** A

## Waveform frequency domain matching-based positioning method for satellite-borne LIDAR footprints

ZHOU Si-Han<sup>1</sup>, ZHAO Pu-Fan<sup>2</sup>, HAN Qi-Jin<sup>3</sup>, LUAN Chao<sup>4</sup>, YANG Jian<sup>1</sup>, WANG Heng<sup>1</sup>,  
MA Yue<sup>1</sup>, ZHOU Hui<sup>1</sup>, LI Song<sup>1,5\*</sup>

1. School of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430072, China;
2. GNSS Research Center, Wuhan University, Wuhan 430079, China;
3. China Center for Resources Satellite Data and Application, Beijing 100094, China;
4. Beijing Institute of Control and Electronic Technology, Beijing 100045, China;
5. Wuhan Institute of Quantum Technology, Wuhan 430010, China)

**Abstract:** The linear mode laser altimeter onboard China's satellite is primarily used to provide elevation control points for imagery. During satellite operations, environmental variations can induce laser pointing offsets, which in turn increase the positioning errors of the footprints, thereby directly reducing the elevation accuracy of the control points. This issue is particularly pronounced in complex mountainous terrains. To enhance the reliability of laser altimeter observations from satellites in such regions, this paper proposed a new laser footprint positioning method based on waveform frequency domain matching. This method utilizes high-precision terrain data for waveform simulation and determines the position of the laser footprint by calculating the correlation between the simulated waveform and the waveform received by China's Gaofen series satellite in the frequency domain. Additionally, systematic deviations in laser pointing are derived from the joint computational results of multi-footprint frequency domain matching. Experiments were conducted using in three regions: central Montana, western Wyoming, and eastern Utah in the United States. The results indicate that the standard deviations of footprint planar offset distances, planar true north pinch angles, and equivalent

收稿日期: 2024-09-03, 修回日期: 2024-12-11

Received date: 2024-09-03, Revised date: 2024-12-11

基金项目: 航天系统装备预先研究项目; 国家自然科学基金(42371440, 41971302)

Foundation items: Supported by the Equipment Pre-research Project of Aerospace Systems Department, the National Natural Science Foundation of China (42371440, 41971302)

作者简介(Biography): 周思寒(1994—), 男, 江苏连云港人, 博士研究生, 主要研究领域为星载激光测高仪标定. E-mail: zhousihan@whu.edu.cn

\*通讯作者(Corresponding author): E-mail: ls@whu.edu.cn

laser pointing deviation angles obtained with this method are all superior to those achieved with the time-domain waveform matching method. The findings underscore the advantages of frequency-domain waveform matching in achieving high-precision footprint localization, thereby providing a robust foundation for enhancing the utility of satellite laser altimeter observations in challenging environments and facilitating the correction of laser altimeter pointing errors.

**Key words:** spaceborne laser altimeter, frequency domain matching, China's domestic Gaofen satellites, footprint localization, pointing error correction

## 引言

星载激光测高仪是一种主动对地观测设备,通过计算激光脉冲飞行时间,融合卫星姿态、位置、激光指向从而快速、精确获取地表三维信息<sup>[1-2]</sup>。近年来,国内外已成功发射多颗搭载激光测高仪载荷的卫星:2003年,美国发射了搭载全球首个地球科学激光测高系统(Geoscience Laser Altimeter System, GLAS)的ICESat(Ice, Cloud and land Elevation Satellite),2018年9月发射ICESat-2,同年12月在国际空间站安装多波束全球生态动力学探测(Global Ecosystem Dynamics Investigation, GEDI)激光测高仪<sup>[3-5]</sup>;我国于2016年发射了资源三号02星,2019年发射了高分七号(GF-7)卫星,2020年发射了资源三号03星和高分十四号卫星,2022年发射了大气环境监测卫星、陆地生态系统碳监测卫星<sup>[6-9]</sup>。星载激光测高仪具有现阶段对地观测最高的绝对高程测量精度,其观测成果已被广泛用于测绘、植被反演、极地监测、资源探测、城市规划等多个领域<sup>[10-14]</sup>。

星载激光测高仪的足印通常作为高程控制点与卫星立体影像共同为大比例尺立体无控测图提供保障。卫星在运行过程中受环境变化如温度、振动等因素影响,导致激光指向角抖动<sup>[15-16]</sup>,加大了激光足印的定位误差:在500 km的轨道高度,1"的激光指向误差对应着足印大约2.4米的定位误差。定位误差直接影响高程精度。受地形影响,2.4 m的定位误差,在1°左右的坡面,会引入约5 cm的高程中误差;在25°左右的坡面,会引入约1.1 m的高程中误差。可见,在起伏山地,定位误差会导致高程中误差急剧增加。以GLAS为例,在裸露平坦地面,高程精度0.15 m,水平位置精度50 m<sup>[17]</sup>,仅能在平坦地表作为控制点使用。相对于分米级的高程精度,星载激光测高仪定位精度较差。而随着GEDI、陆地生态系统碳监测卫星的投入使用,如何在复杂山地提高足印定位精度,提高星载激光测高仪观测成果的可用性,是学者和业界广泛关注的问题。

全波形星载激光测高仪不仅可以

根据回波提取足印内的地形特征与被测目标的垂直结构信息<sup>[18-21]</sup>。对于复杂山地而言,局部区域的地形特征可能与激光回波具有较强的关联性。因此,可利用激光足印在不同地表位置的仿真波形与星载激光测高仪接收回波进行对比,寻找与接收回波相似度最高的仿真波形,并将该仿真计算的几何中心的三维坐标视为该星载接收波形激光足印的“真值”,从而实现足印定位<sup>[22]</sup>。波形的时域匹配中,一般以皮尔逊相关系数(Pearson correlation coefficient, PCC)作为仿真波形与接收波形在时间序列上的相关性判据。Harding D等利用高分辨率数字高程模型(Digital Elevation Model, DEM)生成模拟波形,并与GLAS接收波形进行匹配,证实GLAS在森林地区水平位置精度为10~30 m<sup>[23]</sup>;张文豪等充分考虑激光的时空特性、地表特征建立回波模型仿真器,利用波形匹配,实现了GLAS单个足印在嵩山地区2 m的定位精度<sup>[19]</sup>;Yang等提出DART-Lux模型用于GLAS波形仿真,当足印内部高程差明显时如城市建筑区域,利用波形匹配,能够实现8.19 m的足印定位精度<sup>[24]</sup>。Liu等对高分七号进行了波形仿真与波形匹配,通过多次波形匹配的方式,在黑龙江肇东将高分七号的高程精度从(3.74±0.55) m提高到(0.35±0.50) m<sup>[25]</sup>,通过足印高程精度的提高,论证足印水平位置精度的提高。Li等提出一种基于骨架树的波形匹配算法,用以实现频率调制连续波激光雷达的多目标检测定位<sup>[26]</sup>。李国元等将地形与波形匹配相结合,对高分七号星载激光测高系统进行足印定位,实现了平坦地区11.6 m的定位精度<sup>[27]</sup>。伍煜等利用多足印联合定位的波形匹配,在平均坡度20°的犹他州,将高分七号卫星的高程精度从(2.45±2.93) m提升至(0.27±0.61) m<sup>[22]</sup>,以高程精度的提升验证了激光足印水平位置精度的提升。Xu等用GEDI波形模拟器生成仿真波形,将地形与波形进行联合匹配,并以最大化平均SimiCoef(Similarity Coefficient)作为匹配约束条件,实现对GEDI地理位置水平位置误差的校正<sup>[28]</sup>。

大量学者的研究表明,特殊的地形、高精度的波形仿真器与合理的波形匹配相关性判据是实现足印定位的重要条件。激光指向的改变会影响定位精度,在山地则更为明显<sup>[29]</sup>。而在复杂山地中,地表类型多数以裸露地表、低矮灌木、植被等形式混合存在。同时,地形微小起伏、硬件系统噪声等都将影响波形的量化过程,从而引起波形的小幅变化,这种变化通常会被理解为噪声,但其实际上由噪声与地形特征共同组成。波形时域匹配的计算会利用波形的小幅变化,当信号中包含复杂特性或多个叠加的频率成分,波形时域匹配很难将其区分,噪声的存在或者剔除地形特征都将影响匹配结果。本文提出一种基于波形频域匹配的激光足印定位方法,综合考虑地形地表高程、坡度与地表反射率,在长约1000公里的复杂山地,利用高分七号星载激光测高仪实测波形与仿真波形的多足印相关性联合解算,实现与波形时域(PCC)匹配相同的足印定位能力,并证明该方法得到的结果的不确定度优于PCC。

## 1 基本原理与处理流程

### 1.1 星载激光回波仿真

基于张文豪等的研究,波形仿真简化了激光脉冲向大气传输的过程。模拟发射脉冲经过大气传输衍射到达地表,并被地表反射,反射激光经过大气传输的二次菲涅尔衍射并被测高仪接收的全过程<sup>[19]</sup>。星载激光发射脉冲到达地面的能量 $S_1(t)$ 如(1)所示:

$$S_1(t) = \frac{\eta_1 \eta_{\text{atm}}(\lambda)}{h_\nu L} \iint_{\Sigma} |E(x,y)|^2 \cdot |F(t-T)|^2 dx dy \quad (1)$$

式(1)中, $\eta_1$ 为星载激光测高仪的发射效率, $\eta_{\text{atm}}(\lambda)$ 为波长为 $\lambda$ 时的单程大气透过率, $h_\nu$ 为光子能量, $L$ 为激光传输的距离; $E(x,y)$ 为激光发射脉冲的空间横截面能量分布函数, $F(t)$ 为激光发射脉冲的波形时间分布函数, $T$ 为足印内地表起伏与激光足印水平分布引起的时延。式(1)中 $T$ 可进一步表示为:

$$T = \frac{2D}{c} - \frac{x^2 + y^2}{cD} + \frac{2\xi(x,y)}{c} \quad (2)$$

式(2)中, $\xi(x,y)$ 为地表足印内的高程轮廓, $c$ 为真空中光飞行的速度, $D$ 为被测目标距离星载激光测高仪的高度。

星载激光发射脉冲经过大气传输、地表反射后,经大气传输到达星载激光测高仪接收系统,所

接收到的信号能量 $S_2(t)$ 可视为发射信号与地表目标模型的卷积,可表示为:

$$S_2(t) = \frac{\eta_2 A_R \eta_{\text{atm}}(\lambda)}{L} R(x,y) \cdot S_1(t) \quad (3)$$

式(3)中, $\eta_2$ 为星载激光测高仪的接收效率, $A_R$ 为望远镜视场接收孔径, $R(x,y)$ 为地表足印内各目标的反射率分布函数。

地表地物具有随机性与复杂性,很难用统一解析式来表达任意一处的地形变化。因此,本文仿真时,通过构建地表数字模型的不规则三角网(Triangulated Irregular Net, TIN)表达地形,并将最小格网目标接收到的能量结合反射率特性并按照坡度与坡向的分解,更精确的表达最小网格回波能量。

$$\xi_i(x,y) = \xi_0 \cdot \cos(\gamma) \cdot R(x,y) \quad (4)$$

式(4)中, $\xi_i(x,y)$ 为地形表达中最小格网能够返回的能量, $\xi_0$ 为粗糙度, $\cos(\gamma)$ 为格网坡度的余弦值, $R(x,y)$ 为地表足印内各目标的反射率分布函数。对于该足印内地形的精细化表达, $\xi(x,y)$ 可表示为:

$$\xi(x,y) = \sum \xi_i(x,y) \quad (5)$$

由于星上电路增益、APD量子转换效率、APD增益系统、电路负载、电子电量的等信息未公开,导致波形仿真参数与星载系统参数存在强度差异,波形频域匹配时,需做归一化。因此相关计算便不考虑。故而,仿真的回波能量 $S(t)$ 可表示为:

$$S(t) = \frac{\eta_1 \eta_2 A_R \eta_{\text{atm}}(\lambda)^2}{h_\nu L^2} \iint_{\Sigma} \xi(x,y) |E(x,y)|^2 \cdot |F(t-T)|^2 dx dy \quad (6)$$

### 1.2 波形频域匹配原理

星载激光测高仪接收波形为 $WF_{\text{real}}$ ,仿真波形为 $S$ 。将两个波形进行傅里叶变换,分别得到 $X_{\text{real}}[k]$ 和 $X_s[k]$ 。

$$X_{\text{real}}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} WF_{\text{real}}[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (7)$$

$$X_s[k] = \sum_{n=0}^{N-1} S[n] \cdot e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (8)$$

$$k = \frac{Nf}{F_s} \quad (9)$$

其中, $X_{\text{real}}[k]$ 为 $WF_{\text{real}}$ 的频域信号, $X_s[k]$ 为 $S$ 的频域信号。 $N$ 为样本数, $f$ 为波形原始频率, $F_s$ 为采样频率。计算两者的频谱差异 $D[k]$ :

$$D[k] = X_{\text{real}}[k] - X_s[k] \quad (10)$$

频谱差异的模为:

$$|D[k]| = \sqrt{\text{Re}(D[k])^2 + \text{Im}(D[k])^2}, \quad (11)$$

其中,  $\text{Re}(D[k])$  和  $\text{Im}(D[k])$  分别是  $D[k]$  的实部和虚部。假定频率分布的均值为  $\mu$ , 标准差为  $\sigma$ , 计算频域差异的模时, 为了降低传输过程与激光硬件系统产生的噪声对匹配结果的影响, 只计算频率  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  区间的能量。对  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$  区间能量求和, 得  $S_{|D[k]|}$ :

$$S_{|D[k]|} = \sum |D[k]|, \quad (12)$$

仿真波形与接收波形越相似, 各频率成分上的能量和相位越接近, 各频率的  $|D[k]|$  就越小,  $S_{|D[k]|}$  就越小。那么  $S_{|D[k]|}$  越小, 仿真波形与接收波形也就具备更高的相似性。

## 2 实验验证

### 2.1 仿真系统参数与研究区域

本研究以高分七号卫星激光测高仪系统参数作为输入。高分七号搭载具备全波形采集的两波束激光测高仪, 地面激光足印沿轨方向间距约 2.4 km、垂轨方向间距约 12 km, 详细参数见表 1<sup>[27,30-34]</sup>。

表 1 高分七号卫星激光测高仪基本参数

Table 1 Basic parameters of GF-7 satellite laser altimeter

Parameter	Value
Orbital altitude [km]	505.984
Wavelength [nm]	1064
Pulse width of the emitted waveform [ns]	4~8
Laser beam divergence angle [ $\mu\text{rad}$ ]	30~35
Telescope aperture diameter [mm]	600
Sampling frequency [Hz]	2G
Spatial distribution of laser emission	Designed based on the Gaussian fundamental mode
Laser emission and reception waveform	Measured

如图 1 所示, 实验区域选择在美国蒙大拿州中部、怀俄明州西部和犹他州东部。三个区域均为复杂山地, 地表类型丰富, 且地理位置依次相连。蒙大拿州实验区纬度  $45.055\ 066^\circ\text{N}$ ~ $48.982\ 87^\circ\text{N}$ , 经度  $107.789\ 2^\circ\text{W}$ ~ $109.708\ 153^\circ\text{W}$ , 高程  $756\sim 3\ 600\ \text{m}$ ; 怀俄明州西部实验区纬度  $41.067\ 37^\circ\text{N}$ ~ $44.941\ 06^\circ\text{N}$ , 经度  $108.614\ 05^\circ\text{W}$ ~ $111.046\ 04^\circ\text{W}$ , 高程  $1\ 200\sim 4\ 199\ \text{m}$ ; 犹他州实验区纬度  $39.990\ 20^\circ\text{N}$ ~

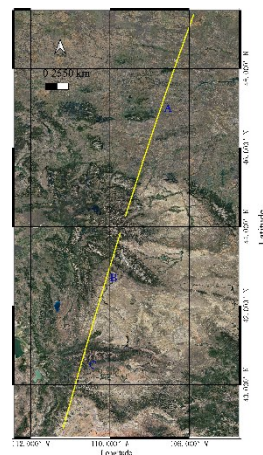


图 1 实验区域

Fig. 1 Experimental area

$41.043\ 434^\circ\text{N}$ , 经度  $110.333\ 916^\circ\text{W}$ ~ $111.101\ 15^\circ\text{W}$ , 高程  $1\ 900\sim 4\ 000\ \text{m}$ 。GF-7 号卫星 7203 号轨道于 2021 年 2 月 19 日经过该区域。本文研究与验证数据采用 7203 号轨道的波束 2 数据。

GF-7 卫星轨道 7203 号卫星记录激光足印坐标数据共 689 组, 受环境影响, 会出现激光脉冲发射后无回波信息, 这些激光足印数据在后续处理中完全不可用, 需要剔除<sup>[35]</sup>。同时对于激光足印所处地面无机载点云、机载点云未携带  $1064\ \text{nm}$  地表反射强度的数据, 由于缺乏波形仿真必要参数, 也需要剔除。无效数据剔除后, 轨道 7203 号剩余 239 个激光足印。从该轨道起点, 选取约  $1\ 000\ \text{km}$  的轨道长度, 覆盖足印 1~409 号, 有效足印数 90 个, 地面位置包含蒙大拿州、怀俄明州与犹他州东北部, 地面类型包含裸露地表、低矮灌木、植被等, 所有地形对应的足印数据均保留。对于植被覆盖区域, 仿真时所需的地形数据将使用数字表面模型 (Digital Surface Model, DSM)。将 90 个足印所经过区域按照地理位置分为 A、B、C 三组。具体组别与足印信息见表 2。

表 2 足印分组

Table 2 Footprints groupings

Group	The range of footprint indices	Northern latitude range	Western longitude range
A	54~302	$43.115\ 62^\circ\sim 48.276\ 681^\circ$	$108.277\ 06^\circ\sim 109.962\ 04^\circ$
B	306~350	$42.114\ 70^\circ\text{N}\sim 43.032\ 27^\circ$	$109.987\ 58^\circ\sim 110.263\ 12^\circ$
C	351~409	$40.090\ 00^\circ\text{N}\sim 42.093\ 85^\circ$	$110.269\ 30^\circ\sim 110.849\ 13^\circ$

本文仿真所需要的地形地表数据,由美国地质勘探局(United States Geological Survey, USGS)提供的机载激光雷达点云数据生成。7203号轨道下的机载点云数据于2020年、2021年、2022年、2023年飞行采集获得,单个机载点云数据文件覆盖面积为 $1\text{ km}\times 1\text{ km}$ 。总体来说,点云密度为 $(4.038\sim 12.933)\text{ sample}/\text{m}^2$ ,点云间距为 $(0.278\ 1\sim 0.497\ 7)\text{ m}$ 。点云平面精度 $0.06\text{ m}$ ,高程精度优于 $0.1\text{ m}$ <sup>[22]</sup>。该机载激光雷达工作波长为 $1\ 064\text{ nm}$ ,同时记录了 $1\ 064\text{ nm}$ 波长的地表地物反射强度信息,与GF-7卫星的激光测高仪工作波长一致,因此,可以将机载点云携带的反射强度信息用作GF-7卫星过境时获得的地表地物反射强度。

## 2.2 星载激光测高仪足印匹配处理流程

根据机载点云的密度与点云距离,在保证原始精度的情况下,将机载点云生成平面分辨率为 $0.5\text{ m}$ 的DEM/DSM。以星载激光测高仪记录的足印位置为坐标原点 $(0,0)$ ,生成以原点 $(0,0)$ 为中心的系列待仿真足印坐标。为了提高仿真计算效率,采用金字塔搜索地形匹配方法<sup>[36]</sup>确定大致范围,将区域由整个DEM/DSM缩小至 $300\text{ 行}\times 300\text{ 列}$ 大小为 $150\text{ m}\times 150\text{ m}$ 的新DEM/DSM,星载激光测高仪记录的足印位置仍为坐标原点 $(0,0)$ 。每行的待仿真足印中心间隔 $1\text{ m}$ ,每列的待仿真足印中心间隔 $1\text{ m}$ 。即共有 $129\times 129$ ,共 $16\ 641$ 个待仿真足印中心。利用波形仿真器,逐行进行波形仿真,得到存储了仿真波形的 $129\times 129$ 的阵列数组 $M_{S_{\text{sim}}}$ 。计算该阵列数组每个元素中仿真波形与星载激光测高仪接收波形的 $S_{D[k]}$ 值,从而得到一个 $129\times 129$ 的 $S_{D[k]}$ 阵列 $M_{S_{D[k]}}$ 。对于单个足印匹配结果而言,理论上 $M_{S_{D[k]}}$ 最小值处的位置,就是该星载激光测高仪接收波形的“真值”,即为该激光足印对应的平面系统偏差。

地形影响足印匹配结果,单个足印匹配获得的相关系数矩阵等高线图可能存在无极值区情况。因此,本文将采用同一轨道上的多个足印频域匹配

结果进行叠加,充分利用同一轨道下不同地形对激光足印定位能力的差异,从而得到该轨道的激光指向的平面系统偏差。基于波形频域匹配的多足印联合解算流程如图2所示。

## 3 结果与分析

### 3.1 单个激光足印匹配结果

采用2.2中的激光足印匹配处理流程,对轨道7203号A、B、C三组共90个足印进行波形仿真与匹配。低矮灌木对激光传输影响相对较小,因此便不做单个激光足印匹配结果展示。本节将以足印142号、足印408号激光足印举例分析。足印142号位于A组的一个起伏的裸露山地,足印408号位于C组起伏山地中的森林植被覆盖区域。

足印142号位于A组的一个起伏的裸露山地,其所在区域的DEM如图3(a)所示,在 $150\text{ m}\times 150\text{ m}$ 的DEM中,高程区间为 $1\ 130\sim 1\ 150\text{ m}$ ,且从DEM中可知,该地区地势起伏多变,坡向各异。在该区域DEM进行仿真遍历,得到共计 $16\ 641$ 个仿真波形,并与GF-7真实接收波形进行频域匹配分析,得到该激光足印在该DEM的频谱差模相关系数矩阵。其相关系数的等高线图如图3(b)所示。X为正东方向,Y为正北方向。

理论上而言,频谱差模的数值越小,表明该仿真波形与真实星载接收波形在各频率的分量的差异越小,表明两波形相似度越高。寻找图3(b)中的最小值坐标。将该坐标的仿真波形与星载激光测高仪接收波形的幅度差、频谱差模结果进行展示,见图4。

在该区域,任选非极值区域的仿真波形与真实接收波形进行分析展示。两波形的幅度差、频谱差模结果见图5。可见,不论是幅度还是频谱模差,该波形与真实波形的差异均远大于图4中的最相似仿真波形与真实接收波形的差异。但由于相关系数矩阵存在大面积的极值区域(图3(b)条带状极值区域),所以即使最小值处仿真波形的频谱分析以及与真实接收波形的频谱分析极其接近,但仍然无法

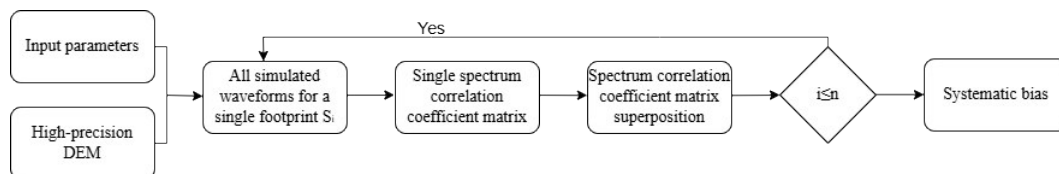


图2 基于波形频域匹配的多足印联合解算流程图

Fig. 2 Flowchart of multi-footprint joint solution based on frequency-domain waveform matching

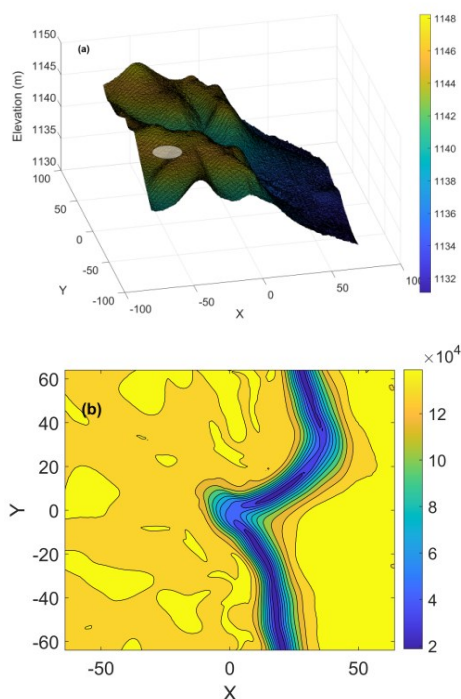


图3 足印142号所在区域:(a) DEM;(b) 相关系数等高线  
 Fig. 3 The area of footprint 142: (a) DEM; (b) correlation coefficient contours

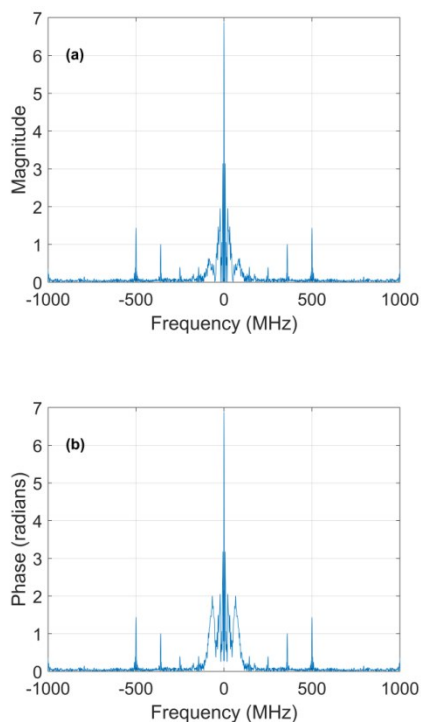


图4 最小值处仿真波形与GF-7波形的频域分析:(a) 幅度差;(b) 频谱差模  
 Fig. 4 Frequency-domain analysis of simulated and GF-7 waveforms at minimum value: (a) amplitude difference; (b) spectrum difference modulus

将此处认为是该足印的最佳匹配位置。

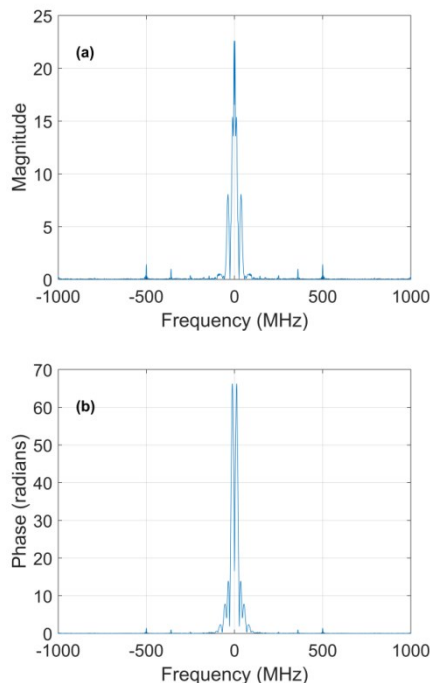


图5 任选仿真波形与GF-7波形的频域分析:(a) 幅度差;(b) 频谱差模  
 Fig. 5 Frequency-domain analysis of selected simulated and GF-7 waveforms: (a) amplitude difference; (b) spectrum difference modulus

足印408号位于C组的一个起伏的森林,其所在区域的DSM如图6(a)所示,在150 m×150 m的DSM中,高程区间为3 050~3 095 m,且从DSM中可知,该地区地势起伏多变,植被生长茂盛,长势高耸。对该区域DSM进行遍历仿真,得到129×129共计16 641个仿真波形,并与GF-7真实接收波形进行频域匹配分析,得到足印408号在该DSM的频谱差模相关系数矩阵,其相关系数的等高线图如图6(b)所示。X为正东方向,Y为正北方向。

由图6(b)可知,足印408所在DSM的仿真匹配结果,相关系数矩阵依旧存在大面积的极值区域(图6(b),勺状区域)。且通过对比图3(b)可知,两个足印的频谱差模相关系数矩阵的极小值区域存在交叉。根据图6(b)找到频谱差模的最小值,将最小值处的仿真波形与真实接收波形的幅度差、频谱差模结果进行回波频谱分析,见图7。

通过对比图7与图4可知,对于两个完全不同属性的地形地表而言,同为频谱差模最小值,但由于地形与接收波形的不同,频谱差模最小值的数值也不相同,图7中各项差值大于图4的各项差值。

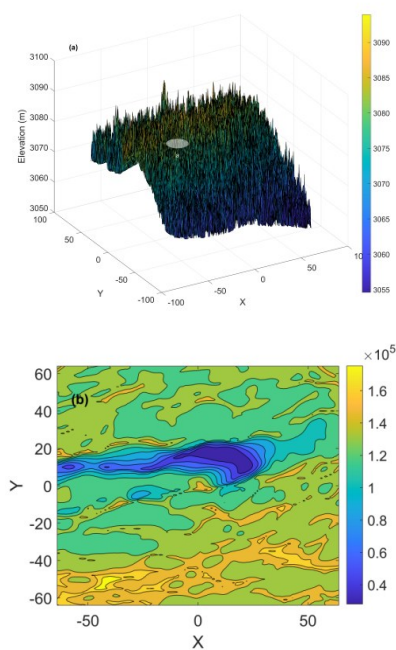


图6 足印408号所在区域:(a)DSM;(b)相关系数等高线  
Fig. 6 The area of footprint 408: (a) DSM; (b) correlation coefficient contours

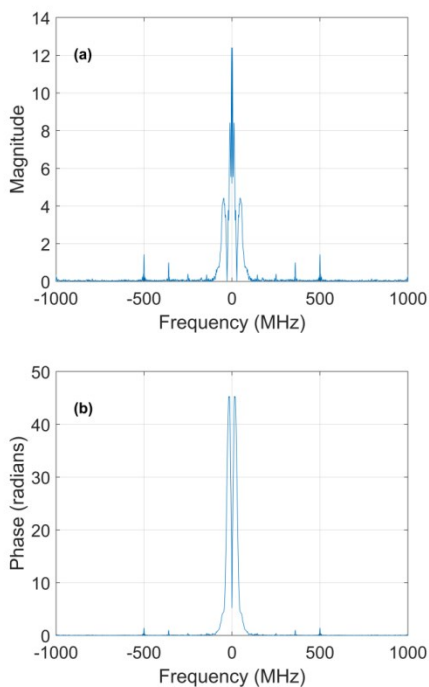


图7 最小值处仿真波形与GF-7波形的频域分析:(a)幅度差;(b)频谱差模  
Fig. 7 Frequency-domain analysis of simulated and GF-7 waveforms at minimum value: (a) amplitude difference; (b) spectrum difference modulus

推测原因是足印408号所处森林,树木生长茂盛,星载激光测高仪会穿透森林冠层;且机载点云获取的

时间与卫星过境时间存在差异,即在此时间差异中,也存在树木生长的情况。因而,对于处在森林的激光足印的仿真波形与真实波形的幅度差与频谱差模都大于落地地表的激光足印的频谱分析数据。

由图3(b)、图6(b)可知,当采用单个激光足印进行匹配时,频谱差模相关系数矩阵存在大面积的极值区,较难通过匹配的方式找到唯一解。

### 3.2 多激光足印联合处理结果与分析

GF-7号激光足印直径相较于GLAS直径较小,足印内能够覆盖的地形特征远比GLAS足印内的地形特征少,因此小光斑足印匹配难度更高。为了能够更精准的提高定位匹配精度,采用多足印频谱差模相关系数矩阵叠加的方式,获得相关系数矩阵中更为精准的极值区域,从而获得更为精准的匹配位置。

表3 足印交叉分组

Table 3 Footprint cross-grouping

Group category	The range of footprint indices	Region(quantity) [Count]
Group 1	54~302	A(30)
Group 2	306~350	B(30)
Group 3	351~409	C(30)
Group 4	136~323	A(15)+B(15)
Group 5	325~385	B(15)+C(15)
Group 6	54~350	A(30)+B(30)
Group 7	136~385	A(15)+B(30)+C(15)
Group 8	306~409	B(30)+C(30)
Group 9	54~409	A(30)+B(30)+C(30)

由于无法获得各激光脚点的坐标的“真值”,因此只能利用分组多次重复试验的方法确定本文提出方法所得结果的稳定性。依据系统误差在短时间内不发生变化的特性,将一轨数据分为三个区域(即A区域、B区域、C区域),选取不同激光脚点组合后作为输入数据,通过多次重复试验确定该轨数据平面偏移的真值以及所估计的平面偏移量的不确定度(STD)。由于系统误差在短时间内不发生变化,理论上同一轨数据应当具有相同的平面偏移,因此多次重复试验所得结果的均值当可视为该轨数据平面偏移量的真值,而标准差则可以用来衡量波形匹配方法所得结果的不确定度。对90个激光足印进行交叉分组,分组结果见表3。9组多足印频谱差模矩阵叠加结果见图8,X为正东方向,Y为正

北方向。

由图 8 可知,虽然 9 组频谱差模叠加矩阵各有不同,但极小值区域存在交叉。分别提取这 9 组频谱差模叠加矩阵的最小值坐标,考虑到频谱差模相关系数等高线图中为极小值区域,而非极小值点,因此对各叠加矩阵的极小值区域进行重心求解,并将求解后的重心坐标视为最小值坐标。同时各叠加矩阵的最小值坐标与星载记录激光足印坐标(0, 0)的连线,视为平面偏移距离,同时该连线与正北方向的夹角视为平面正北夹角,并根据轨道高低,计算等效激光指向偏离角度,结果见表 4。

图 8(a)、(b)、(c)显示:A 区域的叠加偏离结果为(20.9876, 10.0419) m, B 区域的叠加结果为(20.9620, 9.0074) m, C 区域的叠加结果为(19.0345, 13.0122) m;对于图 8(i), A、B、C 三个区

域总叠加结果为(20.0053, 10.9890) m。偏离结果相对一致。B 区相对 A 区,正东方向接近,仅在正北方向上产生约 1 m 的偏移;C 区相对 A 区,正东方向存在约 2 m 的偏移,正北方向存在约 3 m 的偏移。C 区域偏离相对 A、B 区域较大,原因是 C 区域落在森林植被的激光足印数据较多。

由图 8 和表 4 可知,对于表 4 中各组的最小值坐标值,都在图 8 的任意子图的极值区域。该组交叉叠加获得的足印坐标与卫星记录的足印坐标的偏离程度标准差为(1.014, 1.490) m,平面偏移距离的标准差为 1.011 m,平面正北夹角的标准差为  $3.57^\circ$ ,等效激光指向偏离角度的标准差为  $0.41^\circ$ 。

### 3.3 多激光足印联合处理结果对比分析

如引言中所提及,PCC 是常见的波形匹配方法,可以作为足印定位的结果参考,主要作用在波形的

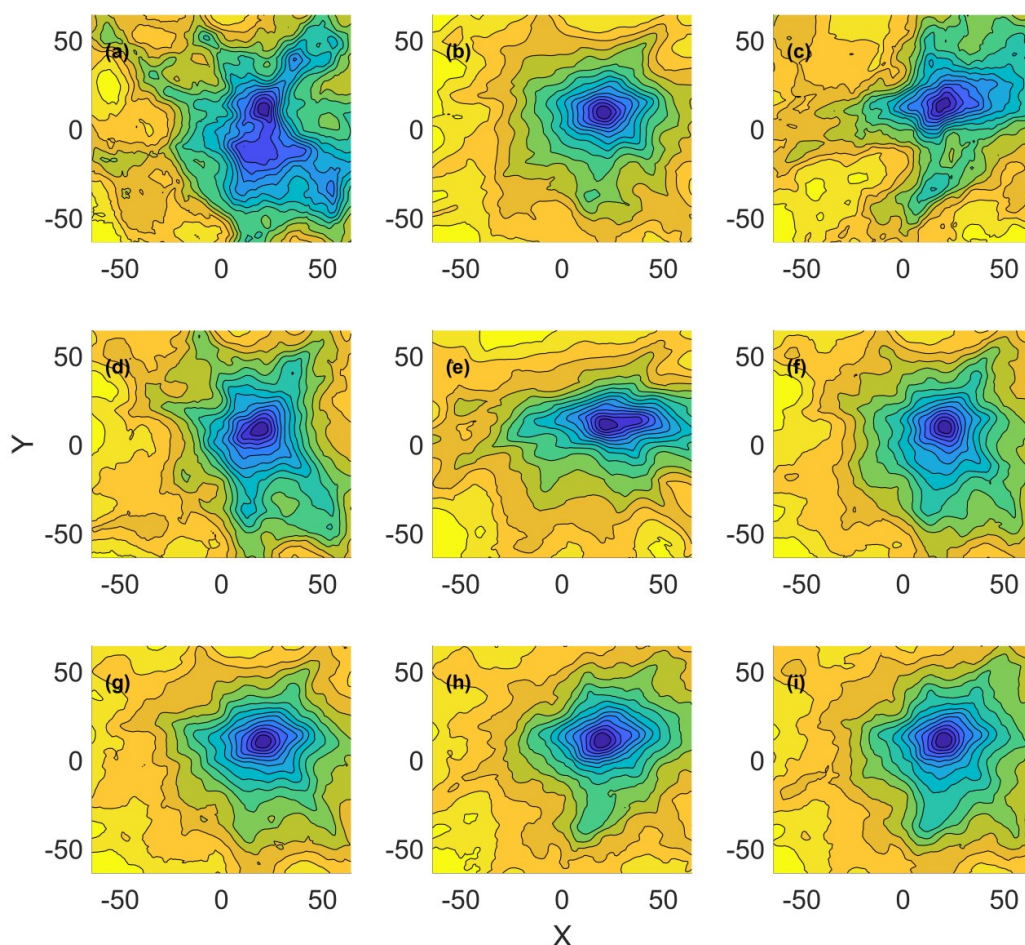


图 8 多足印频谱差模矩阵叠加结果:(a) 足印 54~302;(b) 足印 306~350;(c) 足印 351~409;(d) 足印 136~323;(e) 足印 325~385;(f) 足印 54~350;(g) 足印 136~385;(h) 足印 306~409;(i) 足印 54~409

Fig. 8 Results of multi-footprint spectrum difference modulus matrix overlay: (a) footprint 54-302; (b) footprint 306-350; (c) footprint 351-409; (d) footprint 136-323; (e) footprint 325-385; (f) footprint 54-350; (g) footprint 136-385; (h) footprint 306-409; (i) footprint 54-409



表4 多足印频谱差模叠加结果分析

Table 4 Analysis of multi-footprint spectrum difference modulus overlay results

Figure	Coordinates of the minimum value [m]	Planar offset distance [m]	Planar northward angle [°]	Equivalent laser pointing deviation angle [°]
Fig. 8(a)	(20.9876, 10.0419)	23.27	64.43	9.49
Fig. 8(b)	(20.9620, 9.0074)	22.82	66.75	9.30
Fig. 8(c)	(19.0345, 13.0122)	23.06	55.64	9.40
Fig. 8(d)	(19, 8.0072)	20.62	67.15	8.41
Fig. 8(e)	(22.0186, 11.0279)	24.63	63.4	10.04
Fig. 8(f)	(20.9713, 9.0344)	22.83	66.69	9.31
Fig. 8(g)	(20.9774, 10.0097)	23.24	64.49	9.47
Fig. 8(h)	(19.0471, 10.9832)	21.99	60.03	8.96
Fig. 8(i)	(20.0053, 10.9890)	22.82	61.22	9.30
Mean value	(20.558, 10.457)	22.811	63.31	9.30
Standard deviation	(1.014, 1.490)	1.011	3.57	0.41

时域分析。若采用PCC计算仿真波形与接收波形在时域波形匹配的相似度,计算公式如下:

$$p = \frac{\text{Cov}(S(t), WF_{\text{real}}(t))}{\sqrt{\sigma(S(t))\sigma(WF_{\text{real}}(t))}} \quad (13)$$

根据PCC的定义,PCC值越大,两波形越相似。按照3.2的分组方案,将90个足印进行分组叠加,9组多足印PCC叠加的结果见图9,X为正东方向,Y为正北方向。

从图8和图9可知,图8的各极小值区域与图9的各极大值区域高度交叉。采取图8和表4的数据分析方法,从而获得PCC匹配的有关多足印叠加的最大值坐标、平面偏移距离、平面正北夹角、等效激光指向偏离角度等数据,结果见表5。

对于图9(a)、图9(b)、图9(c),图9(i)而言,其最大值坐标分别为(19.0090, 8.9756) m、

(20.0136, 9.0153) m、(16.0451, 11.0308) m、(18.0218, 10.0088) m,相比较图8(a)、(b)、(c)、(i),变化趋势一致。不难看出,表4中的最值坐标,均在图9的极大值区域;表5中的最值坐标,也均在图8的极小值区域。侧面论证了基于波形频域匹配方法可以实现激光足印的高精度定位功能。

将表4和表5整理成关于两种方法精度和稳定性的分析,见表6。

以最值坐标来比较两种方法获得的足印位置,本文方法和PCC得出的偏移平均值一致,均在对方的等高线视图的极值区,表明本文方法的结果是正确有效的。同时,本文方法获得的平面偏移距离标准差、平面正北标准差、等效激光指向偏离角度标准差均比PCC获得的各值更小,表明本文方法得出结果的不确定度比PCC好。同时本次实验区域所

表5 多足印PCC叠加结果分析

Table 5 Analysis of multi-footprint PCC overlay results

Figure	Coordinates of the minimum value [m]	Planar offset distance [m]	Planar northward angle [°]	Equivalent laser pointing deviation angle [°]
Fig. 9(a)	(19.0090, 8.9756)	21.02	64.72	8.57
Fig. 9(b)	(20.0136, 9.0153)	21.95	65.75	8.95
Fig. 9(c)	(16.0451, 11.0308)	19.47	55.49	7.94
Fig. 9(d)	(17.0147, 6.9864)	18.39	67.68	7.50
Fig. 9(e)	(21.0109, 11.0185)	23.72	62.33	9.67
Fig. 9(f)	(19.9941, 8.9979)	21.93	65.77	8.94
Fig. 9(g)	(19.9888, 9.9871)	22.34	63.45	9.10
Fig. 9(h)	(18.0147, 10.9913)	21.10	58.61	8.90
Fig. 9(i)	(18.0218, 10.0088)	20.64	60.95	8.41
Mean value	(18.79, 9.668)	21.172	62.75	8.66
Standard deviation	(1.536, 1.256)	1.491	3.65	0.61

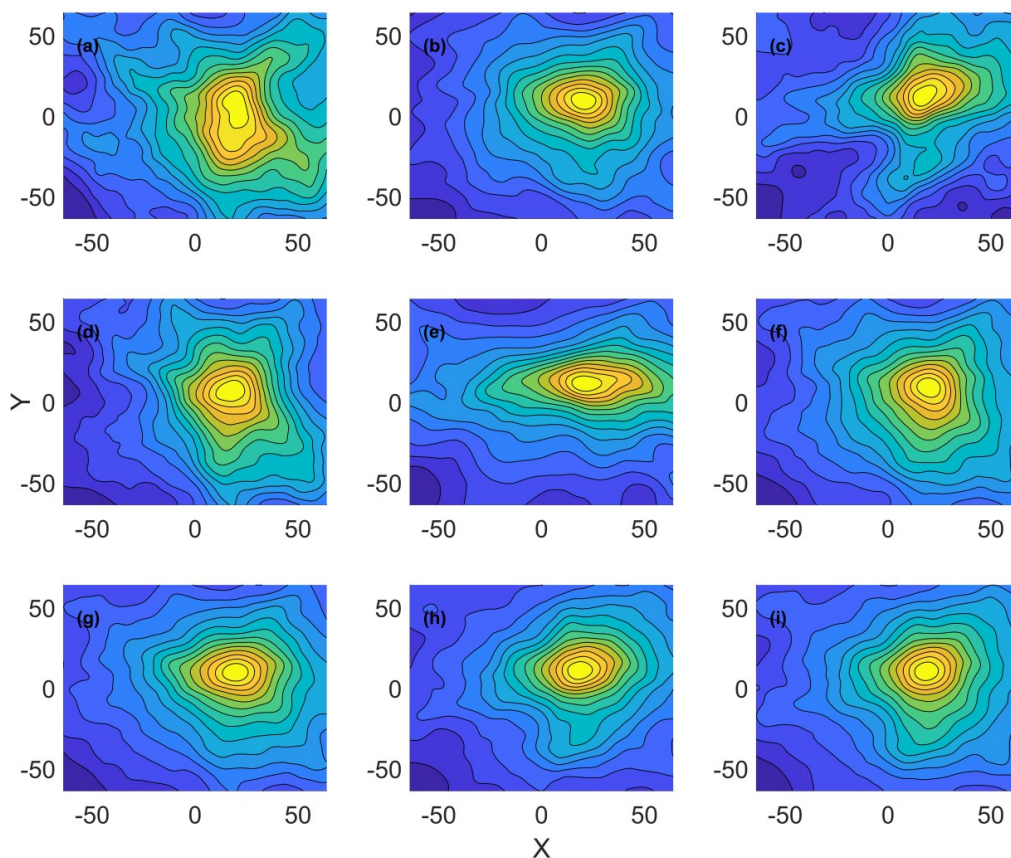


图9 多足印PCC矩阵叠加结果:(a)足印54~302;(b)足印306~350;(c)足印351~409;(d)足印136~323;(e)足印325~385;(f)足印54~350;(g)足印136~385;(h)足印306~409;(i)足印54~409

Fig. 9 Results of multi-footprint PCC matrix overlay: (a) footprint 54-302; (b) footprint 306-350; (c) footprint 351-409; (d) footprint 136-323; (e) footprint 325-385; (f) footprint 54-350; (g) footprint 136-385; (h) footprint 306-409; (i) footprint 54-409

表6 匹配方法稳定性分析

Table 6 Stability analysis of matching methods

Result parameter	Frequency-domain matching	PCC
Mean planar offset distance [m]	22.811	21.172
Standard deviation of planar displacement distance [m]	1.011	1.491
Mean planar northward angle [°]	63.31	62.75
Standard deviation of planar northward angle [°]	3.57	3.65
Mean equivalent laser pointing deviation angle [°]	9.30	8.66
Standard deviation of equivalent laser pointing deviation angle [°]	0.41	0.61

涵盖的地形包括裸露地表、低矮灌木、植被覆盖等,该实验结果也符合频域处理算法一般具有更好的抗噪性能这一规律。

## 4 结论

山区地势起伏,地表地物复杂。为了提高星载激光测高仪观测成果在复杂山地的可用性,提高足印定位精度。本文以GF-7接收波形为试验对象,从发射激光能量的时空分布出发,综合考虑地形地表高程、坡度与地表反射率,提出一种面向复杂山地的基于波形频域匹配的激光足印定位方法,通过多足印联合解算,降低了获取高精度足印定位对地形地表的要求。将本文方法获得的结果与PCC方法获得结果做对比,本文方法和PCC方法得出的偏移平均值一致,证明了本文方法的结果是正确有效的;同时本文方法获得的平面偏移距离标准差、平面正北夹角标准差、等效激光指向偏离角度标准差均比PCC获得的值更低,表明本文方法得出的结果的不确定度比PCC好。为复杂区域或波形信噪比低的波形匹配提供技术支撑,扩大基于地形的波形匹配方法的适用区域与适用范围。为提高卫星激

光测高仪观测成果在复杂山地的可用性以及利用波形匹配实施对卫星激光测高仪指向误差校正奠定了基础。

## References

- [1] Liu B, Yu Y, Jiang S. Review of advances in LiDAR detection and 3D imaging [J]. *Opto-Electronic Engineering*, 2019, 46 (7) : 13. DOI: CNKI: SUN: GDGC. 0.2019-07-003.  
刘博,于洋,姜朔.激光雷达探测及三维成像研究进展[J].*光电工程*, 2019, 46(7):13.DOI:CNKI:SUN:GDGC.0.2019-07-003.
- [2] Chen J Y, Tang X M, Li G Y, et al. Terrain height assessment of satellite laser altimetry standard products for natural resources [J]. *National Remote Sensing Bulletin*, 2024, 28(3).  
陈继溢,唐新明,李国元,等.自然资源陆地卫星激光测高标准产品高程精度评价[J].*遥感学报*, 2024, 28(3).
- [3] Abshire J B, Sun X L, Riris H, et al. Geoscience Laser Altimeter System (GLAS) on the ICESat Mission; On-orbit measurement performance [J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, 32(21): L21S02.
- [4] Markus T, Neumann T, Martino A, et al. The Ice, Cloud, and land Elevation Satellite-2 (ICESat-2) : Science requirements, concept, and implementation [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2017, 190: 260 - 273.
- [5] Potapov P, Li X, Hernandez-Serna A, et al. Mapping global forest canopy height through integration of GEDI and Landsat data [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2021, 253: 112165.
- [6] Wang Z J, Zhang Y, Liu D, et al. Research on the development of detection satellite technology in the novel multi-beam land and ocean lidar [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50(07):158-168.  
汪自军,张扬,刘东等.新型多波束陆海激光雷达探测卫星技术发展研究[J].*红外与激光工程*, 2021, 50(07):158-168.
- [7] Wang J R, Yang Y X, Hu Y, et al. Preliminary location accuracy assessments of GF-14 stereo mapping satellite without ground control points [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2023, 52(1):8-14.  
王建荣,杨元喜,胡燕,等.高分十四号立体测绘卫星无控定位精度初步评估[J].*测绘学报*, 2023, 52(1):8-14.
- [8] Lai K J, Bu L B, Wang Q, et al. Inversion and Validation of Atmospheric CO<sub>2</sub> Column Concentration Inversion of Spaceborne IPDA Lidar Based on Atmospheric Environment Monitoring Satellite [J]. *Acta Optica Sinica*, 2024, 44 (12):182-194.  
赖锴婕,卜令兵,王勤,等.大气环境监测卫星星载IPDA激光雷达的大气二氧化碳柱浓度反演及多源数据对比验证[J].*光学学报*, 2024, 44(12):182-194.
- [9] Chen X Y, Long X X, Li Q P, et al. Data Procceing and Accuracy Verification for Laser Altimeter of Terrestrial Ecosystem Carbon Inventory Satellite [J/OL]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 1-18 [2024-07-28]. <https://doi.org/10.13203/j.whugis20230110>.  
陈新阳,龙小祥,李庆鹏,等.陆地生态系统碳监测卫星激光数据处理与精度验证[J/OL].*武汉大学学报(信息科学版)*, 1-18 [2024-07-28]. <https://doi.org/10.13203/j.whugis20230110>.
- [10] Abshire J B, Sun X, Riris H, et al. Geoscience laser altimeter system (GLAS) on the ICESat mission: Pre-launch and on-orbit measurement performance [C]// *IGARSS 2003. 2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Proceedings (IEEE Cat. No. 03CH37477)*. IEEE, 2003, 3: 1534-1536.
- [11] Schutz B E, Zwally H J, Shuman C A, et al. Overview of the ICESat mission [J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, 32(21): L21S01.
- [12] Dubayah R, Blair J B, Goetz S, et al. The global ecosystem dynamics investigation: high-resolution laser ranging of the Earth's forests and topography [J]. *Science of Remote Sensing*, 2020, 1: 100002.
- [13] Wu Y, Long X X, Yang J, et al. Laser Spot Center Positioning Method in Gaofen-7 Footprint Camera [J]. *Acta Optica Sinica*, 2021, 41 (17) : 1728001. DOI: 10.3788/AOS202141.1728001.  
伍煜,龙小祥,杨坚,等.高分七号卫星足印相机激光光斑中心定位方法研究[J].*光学学报*, 2021, 41(17):1728001.DOI:10.3788/AOS202141.1728001.
- [14] Xie J F, Liu R, Wang Z W, et al. In-orbit geometric calibration and accuracy evaluation of GaoFen-7 spaceborne laser altimeter [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021. DOI: 10.3788/IRLA20200396.  
谢俊峰,刘仁,王宗伟,等.高分七号星载激光测高仪在轨几何检校与精度评估[J].*红外与激光工程*, 2021. DOI:10.3788/IRLA20200396.
- [15] Fan C B, Li J C, Wang D, et al. ICESAT/GLAS laser footprint geolocation and error analysis [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2007, 27(1): 104-106. (in Chinese).  
范春波,李建成,王丹,等.ICESAT/GLAS激光脚点定位及误差分析[J].*大地测量与地球动力学*, 2007, (01): 104-106.
- [16] Yao J Q, LI G Y, Chen J Y, et al. Analysis on the change of GF-7 satellite laser altimeterspot centroid position [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2021, 50 (S02) : 10. DOI:10.3788/IRLA20210539.  
么嘉棋,李国元,陈继溢,等.高分七号卫星激光测高仪光斑质心位置变化分析[J].*红外与激光工程*, 2021, 50 (S02):10.DOI:10.3788/IRLA20210539.
- [17] Abshire J. B., Sun X., Riris H., Sirota J. M., McGarry J. F., Palm S., Yi D., & Liiva P. (2001). Geoscience Laser Altimeter System (GLAS) for the ICESat Mission. In C. Nagasawa & N. Sugimoto (Eds.), *Proceedings of the 12th International Laser Radar Conference (ILRC)* (pp. 141-144). NASA.
- [18] Xie J F, Yang C C, Mei Y K, et al. Full waveform decomposition of spaceborne laser based on genetic algorithm [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2020, 49 (11) : 7. DOI:10.3788/IRLA20200245.  
谢俊峰,杨晨晨,梅,等.基于遗传算法的星载激光全波形分解[J].*红外与激光工程*, 2020, 49(11):7.DOI:10.3788/IRLA20200245.
- [19] Zhang W H, Li S, Zhang Z Y, et al. Using waveform matching to precisely locate footprints of a satellite laser altimeter [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47

- (11): 1117007.  
 张文豪, 李松, 张智宇, 等. 利用波形匹配实现卫星激光测高脚点精确定位的方法[J]. 红外与激光工程, 2018, 47(11): 1117007.
- [20] Liu Z, Gao X, Li G, et al. Decomposition techniques for ICESat/GLAS full-waveform data [J]. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2018, 42: 1179-1182.
- [21] Liu R, Xie J F, Mo F, et al. Waveform Simulation of Spaceborne Laser Altimeter Echo Based on Fine Terrain [J]. Acta Photonica Sinica, 2018, 47(11): 1128001.  
 刘仁, 谢俊峰, 莫凡, 等. 基于精细地形的星载激光测高仪回波波形仿真[J]. 光子学报, 2018, 47(11): 1128001.
- [22] Wu Y, Wang H, Han Q J, et al. A waveform matching-based method of improving laser footprint geolocation for GaoFen-7 spaceborne laser altimeter in mountainous areas [J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2022, 41(6): 1051-1061.  
 伍煜, 王恒, 韩启金, 等. 基于波形匹配的高分七号星载激光测高仪山地区域脚点定位方法研究[J]. 红外与毫米波学报, 2022, 41(6): 1051-1061.
- [23] Harding, David J. ICESat waveform measurements of within-footprint topographic relief and vegetation vertical structure [J]. Geophysical Research Letters, 2005, 32(21): 741-746. DOI: 10.1029/2005GL023471.
- [24] Wang C, Yang X, Xi X, et al. Evaluation of Footprint Horizontal Geolocation Accuracy of Spaceborne Full-waveform LiDAR based on Digital Surface Model [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2020, PP(99): 1-1. DOI: 10.1109/JSTARS.2020.2992094.
- [25] Liu R, Xie J. Calibration of the laser pointing bias of the GaoFen-7 satellite based on simulation waveform matching [J]. Optics Express, 2021, 29(14): 21844-21858.
- [26] Li B, Mo D, Wang P, et al. FMCW lidar multitarget detection based on skeleton tree waveform matching [J]. Applied Optics, 2021, 60(27): 8328-8335.
- [27] Li G Y, Tang X M, Zhou X Q, et al. The method of GF-7 satellite laser altimeter on-orbit geometric calibration without field site [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2022 (051-003). DOI: 10.11947/j. AGCS. 2022. 20200181.  
 李国元, 唐新明, 周晓青, et al. 高分七号卫星激光测高仪无场几何定标法 [J]. 测绘学报, 2022 (051-003). DOI: 10.11947/j. AGCS. 2022. 20200181.
- [28] Xu Y, Ding S, Chen P, et al. Horizontal Geolocation Error Evaluation and Correction on Full-Waveform LiDAR Footprints via Waveform Matching [J]. Remote Sensing, 2023, 15(3): 776.
- [29] Luthcke S B, Thomas T C, Pennington T A, et al. ICESat-2 pointing calibration and geolocation performance [J]. Earth and Space Science, 2021, 8(3): e2020EA001494.
- [30] Tang X, Xie J, Liu R, et al. Overview of the GF-7 laser altimeter system mission [J]. Earth and Space Science, 2020, 7(1): e2019EA000777.
- [31] Li G, Guo J, Tang X, et al. Preliminary quality analysis of GF-7 satellite laser altimeter full waveform data [J]. The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 2020, 43: 129-134.
- [32] Tang X M, Xie J F, Mo F, et al. GF-7 dual-beam laser altimeter on-orbit geometric calibration and test verification [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2021, 50(3): 12. DOI: 10.11947/j. AGCS. 2021. 20200397.  
 唐新明, 谢俊峰, 莫凡, 等. 高分七号卫星双波束激光测高仪在轨几何检校与试验验证 [J]. 测绘学报, 2021, 50(3): 12. DOI: 10.11947/j. AGCS. 2021. 20200397.
- [33] Aiyan G, Jun D, Chengguang Z. Design and on-orbit validation of GF-7 satellite laser altimeter [J]. Spacecraft Engineering, 2020, 39(3): 43-48.
- [34] Guo J Q, Li G Y, Zuo Z Q, et al. Full waveform data quality and characteristic analysis of GF-7 satellite laser altimeter [J]. Infrared and Laser Engineering, 2020, 49(S2): 20200387.  
 郭金权, 李国元, 左志强, 等. 高分七号卫星激光测高仪全波形数据质量及特征分析 [J]. 红外与激光工程, 2020, 49(S2): 20200387.
- [35] Li G, Tang X, Zhang C, et al. Multi-criteria constraint algorithm for selecting ICESat/GLAS data as elevation control points [J]. Journal of Remote Sensing, 2017, 21(1): 96-104.  
 (李国元, 唐新明, 张重阳, 等. 多准则约束的 ICESat/GLAS 高程控制点筛选 [J]. 遥感学报), 2017, 21(1): 96-104.
- [36] Tang X, Xie J, Gao X, et al. The in-orbit calibration method based on terrain matching with pyramid-search for the spaceborne laser altimeter [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 2019, 12(3): 1053-1062.