

文章编号: 1001 - 9014(2008)02 - 0152 - 05

# 开放光栅中史密斯-帕塞尔超辐射机理研究

刘文鑫, 杨梓强, 张祖存, 兰峰, 史宗君, 梁正, 刘盛纲

(电子科技大学 物理电子学院高能所, 四川 成都 610054)

**摘要:**采用理论分析和粒子模拟相结合的方法,对连续电子注通过平板矩形光栅产生毫米波段史密斯-帕塞尔(SP)超辐射机理进行了研究.研究表明:选择恰当的电子注与光栅尺寸参数,光栅表面慢波将与电子注相互作用,使电子注产生群聚,群聚的电子束团将在光栅表面产生史密斯-帕塞尔超辐射,其辐射频率为电子注与光栅表面慢波相互作用同步点频率的整数倍,其辐射角度方向与史密斯-帕塞尔公式所预期的基本一致,表面慢波由于光栅的有限长度也能在其端头以一定的形式辐射出去.

**关键词:**色散方程;史密斯-帕塞尔效应;超辐射;粒子模拟

**中图分类号:** TN248 **文献标识码:** A

## STUDY ON THE MECHANISMS OF SUPERRADIANT SMITH-PURCELL RADIATION IN THE OPEN GRATING

LU Wen-Xin, YANG Zi-Qiang, ZHANG Zu-Cun, LAN Feng,

SHI Zong-Jun, LIANG Zheng, LIU Sheng-Gang

(College of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract:** In combining the theoretical analyses with Particle-in-Cell (PIC) simulations, the physical mechanisms of millimeter band superradiant Smith-Purcell (SP) radiation of continued electron beam passing the planar rectangular grating was studied. The results show that the interactions of surface slow wave with the electron beam occur with the suitable parameters of electron beam and grating, which results in the bunching of electron beam. The super radiation of SP will be produced on the surface of grating due to the bunched electron beam. The radiation frequency is the integral times of synchronous point's frequency of surface wave and electron beam interaction. The radiation angle is in agreement with the SP theory and the slow wave can be radiated at the both ends of grating as the finite lengths.

**Key words:** dispersion equation; Smith-Purcell effect; super radiation; PIC simulation

### 引言

1953年 Smith和 Purcell首先发现当运动电子通过周期光栅表面时,将产生电磁波辐射<sup>[1]</sup>,其辐射波长  $\lambda$  与观测角度  $\theta$  满足公式

$$\lambda = \frac{D}{l} \left[ \frac{1}{\beta} - \cos \theta \right], \quad (1)$$

其中  $\beta = v/c$ ,  $v$  是电子的运动速度,  $c$  是真空中光速,  $D$  是光栅周期, 整数  $l$  是史密斯-帕塞尔辐射的阶数,  $\theta$  是电子注运动方向与观测方向的夹角. 这种辐射是非相干的自发辐射, 已经有多种方法<sup>[2,3]</sup> 对这种现象进行了分析. 1998年美国 Dartmouth大学 J. Ura 等人<sup>[4]</sup> 采用扫描电镜产生高亮度的连续

电子注通过光栅表面,观察到了超辐射现象. 它是由表面慢波与电子注相互作用引起的周期性电子群聚束团在光栅表面产生的一种功率远远高于自发辐射的辐射. 产生超辐射的条件是电子注的电流超过某一临界电流,此时电子注与波的相互作用增强,导致电子注群聚. 由群聚电子束团与光栅相互作用产生的辐射即是 Smith-Purcell超辐射<sup>[5-7]</sup>. 这种基于 Smith-Purcell效应的超辐射现象引起了科学家们的广泛研究兴趣及政府的高度关注,是目前国际上比较活跃的研究领域之一,主要是它有望发展成为可调、紧凑、功率大的太赫兹辐射源.

本文采用理论分析和粒子模拟相结合的方法,对连续电子注通过平板矩形光栅产生毫米波段史密斯

收稿日期: 2007 - 03 - 12, 修回日期: 2007 - 11 - 28

基金项目: 国家自然科学基金(60571020)资助项目

作者简介: 刘文鑫(1976-), 男, 湖南衡阳人, 电子科技大学博士研究生, 主要从事 THz电子学方面的研究工作.

Received date: 2007 - 03 - 12, revised date: 2007 - 11 - 28

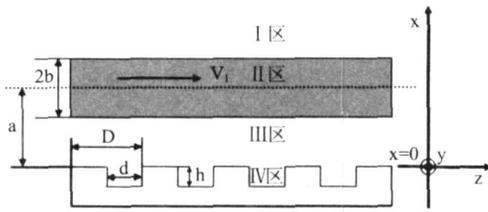


图1 物理模型  
Fig 1 Physical model

斯-帕塞尔超辐射机理进行了研究。

### 1 色散方程

对图1所示的物理模型进行史密斯-帕塞尔辐射特性的理论分析和粒子模拟研究。电子注的中心距光栅表面的距离为  $a$ 、厚度为  $2b$ 、密度均匀分布,在无限大的引导磁场下沿  $z$ 轴方向以速度  $v_1$  通过平板矩形光栅的表面,光栅的周期长度为  $D$ 、槽宽为  $d$ 、深度为  $h$ 、在  $y$ 方向均匀无变化。

为了研究问题的方便,我们只考虑沿  $z$ 轴传播的  $TM$ 波,把注波相互作用区域分成如图所示的4个部分,由 Maxwell's 方程、流体力学方程、场的连续性条件及边界条件<sup>[8-10]</sup>,可得到考虑电子注情况下  $TM$ 波的色散方程

$$\frac{D}{ic \cdot d} \cot\left(\frac{wh}{c}\right) + \frac{1}{i_n} \cdot \frac{1+R_{3,n}}{1-R_{3,n}} \text{sinc}^2\left(\frac{d}{2} \cdot k_n\right) = 0 \quad (2)$$

其中:  $R_{3,n} = \frac{(n-1) \exp[i2n(a-b)]}{(1+n) + i2\sqrt{n} \cot(2\sqrt{n}nb)}$  为场在  $x=a-b$ 处的反射因子,  $k$ 为波数,  $k_n = k + 2n/D$ 是在考虑周期结构情况下的纵向波数,  $n = (\sqrt{c^2 - k_n^2})^{1/2}$ 是横向波数,  $p = (e^2 n_0 / m_0 \omega_0)^{1/2}$ 为等离子体角频率,  $\epsilon_n = 1 - p^2 / [\omega^2 - (k_n v_1)^2]$ 为介质函数,  $\gamma = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$ 相对论质量因子,  $v_1, c, e, m_0, \omega_0, n_0, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 分别表示为电子运动速度、真空中的光速、电子电荷、电子的静止质量、真空中的介电常数、未扰动电子密度以及谐波的次数。

当不存在电子注时,色散方程(2)可以退化为真空中“冷”光栅的色散方程

$$\frac{D}{ic \cdot d} \cot\left(\frac{wh}{c}\right) + \frac{1}{i_n} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{d}{2} \cdot k_n\right) = 0 \quad (3)$$

“冷”色散方程(3)与文献<sup>[11]</sup>得到结果是一致的。

### 2 数值求解

在数值计算过程中,选取的基本计算参数如表1所列,电子注电压 80kV,在  $y$ 方向每米的电流为

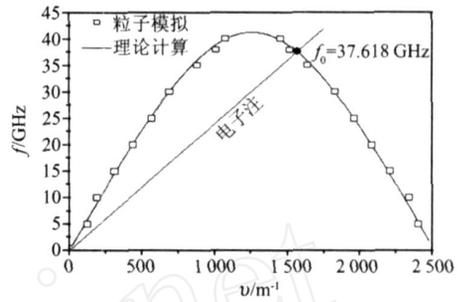


图2 平板矩形光栅的色散曲线  
Fig. 2 Dispersion curve of planar rectangular grating

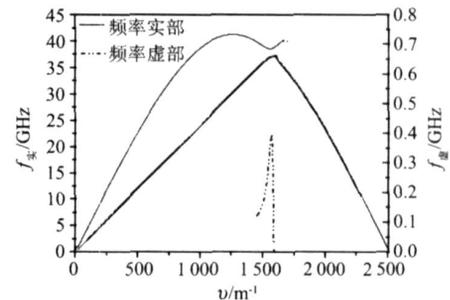


图3 有电子注情况下的色散曲线及增长率  
Fig. 3 The dispersion curves and growth rate in the presence of beam

50A,电子注中心距离光栅表面为 0.25mm、电子注厚度为 0.3mm、密度均匀,在无限大的引导磁场下沿  $z$ 方向运动。平板矩形光栅的周期 2.5mm、槽宽 1.5mm、槽深 1.0mm。没有电子注的情形下,数值求解色散方程(3),得到色散曲线如图2中的实线所示。为了验证计算结果的正确性,利用粒子模拟软件<sup>[12]</sup>进行了模拟验证。其过程是:将一个固定频率的电流源置于光栅槽内,这个电流源将激励起沿光栅表面传播的慢电磁波,通过对光栅表面电场的傅里叶变换,得到该频率下的两个相应波数  $k$ ,然后利用描点的方法得到的色散曲线结果如图2中的方框点所示。结果表明,理论计算和粒子模拟得到的点基本上在同一曲线上,说明两种方法得到的结果基本一致。

表1 理论计算和粒子模拟的主要参数  
Table 1 Parameters for the theoretical calculations and simulations

参数	理论	模拟
光栅周期 $D$	2.50mm	2.50mm
光栅周期数		50
槽宽 $d$	1.50mm	1.50mm
槽深 $h$	1.00mm	1.00mm
电子注电压 $U$	80.0kV	80.0kV
电子注电流 $I$	50.0A	50.0A
电子注中心距光栅表面距离 $a$	0.25mm	0.25mm
电子注厚度 $2b$	0.30mm	0.30mm
引导磁场		2T

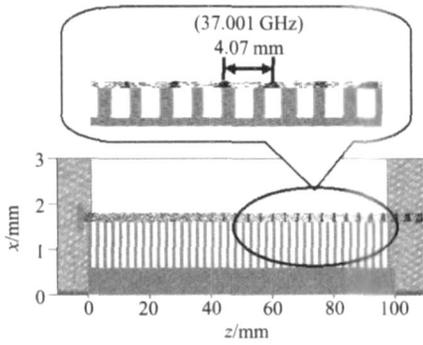


图4 电子在相空间的分布图  
Fig.4 The distribution of electron in the phase space

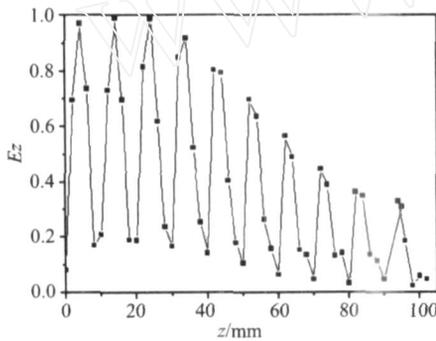


图5 光栅表面电场  $E_z$  沿光栅表面的分布  
Fig.5 The z-direction distribution of electric field  $E_z$  located at the surface of grating

在图 2 中, 80kV 的电子注色散曲线作为参考曲线, 它与冷光栅色散曲线有一个交点, 该交点为注波互作用的同步点, 其同步点的频率为 37.618GHz 在同步点附近, 注波相互作用将产生一个不稳定性增长, 通过数值求解色散方程 (2) 得到的色散曲线及增长率如图 3 所示. 图中的实线表示频率的实部; 虚线是频率的虚部, 它表示增长率. 当  $y$  方向每米的电流为 50A 时, 计算得到峰值增长率为 0.398GHz, 其对应的频率为 37.618GHz, 说明增长率的极大值发生在注波互作用的同步点.

### 3 粒子模拟结果与讨论

在粒子模拟过程中, 选取的参数与理论计算的基本相同, 如表 1 所示. 引导磁场及光栅周期数在理论上可以做到无限大, 但是在实际情况中不可能做到无穷大, 我们这里分别选取 2T 的引导磁场及 50 个周期数的平板光栅进行模拟.

图 4 中给出了电子在相空间中的分布, 可以看出电子注沿光栅表面传输一定的距离之后, 开始群聚, 模拟结果表明群聚电子束团的重复频率为 37.001GHz, 它与注波同步点的频率是一致的, 从

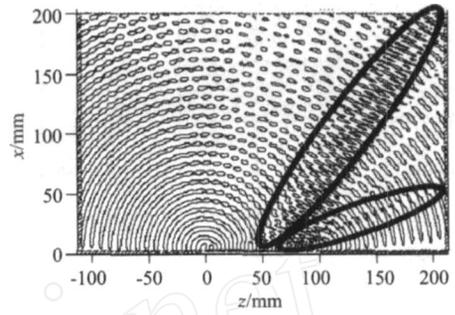


图6 磁场分量  $B_z$  的等势图  
Fig.6 Counter of  $B_z$

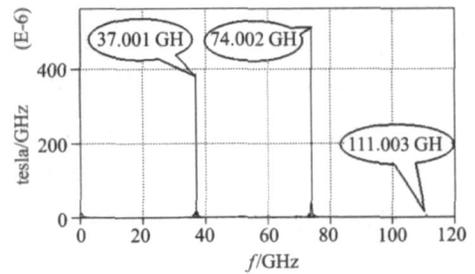


图7 半径为 7cm 的磁场分量, 观察角度  $66^\circ$   $B_y(t)$  的 FFT 变换频谱图

Fig.7 The spectrum of  $B_z$  through the FFT, detected at the radius of 7cm and the angle of  $66^\circ$  from the center of grating

后面的分析可以看出, 辐射波的频率是周期性群聚电子束团重复频率的整数倍. 在模拟中发现, 随着时间的变化, 群聚中心会发生一些变化. 图 5 为位于电子注中心位置上, 光栅表面电磁波的电场  $E_z$  沿光栅表面的变化情况. 从光栅的后端到前端, 电场  $E_z$  的峰值场幅值是不断增加的, 说明在电子注运动的逆方向, 电磁波的能量是不断增加的. 由图 2 的色散曲线可知, 与电子注互作用的电磁波是群速负的慢电磁波, 说明使电子注发生群聚的电磁波为光栅的表面慢波. 它是只存在于光栅表面附近的非辐射波, 相速比光速慢, 因此称做表面慢波. 它的定义与周期结构中慢波的定义相同, 也正因为其相速比光速慢, 所以可以和电子注发生相互作用.

图 6 中给出了磁场分量  $B_z$  的等势线图, 从图中可以看出存在两个史密斯 - 帕塞尔辐射较强的区域, 说明在这两个区域发生了相干的史密斯 - 帕塞尔辐射. 为了进一步分析史密斯 - 帕塞尔的辐射特性, 我们在辐射空间以光栅中心为圆心, 7cm 为半径, 沿光栅逆时针方向每  $2^\circ$  设置了一个观察点, 分析  $B_z$  分量的频率及对应的幅值随空间的变化情况.

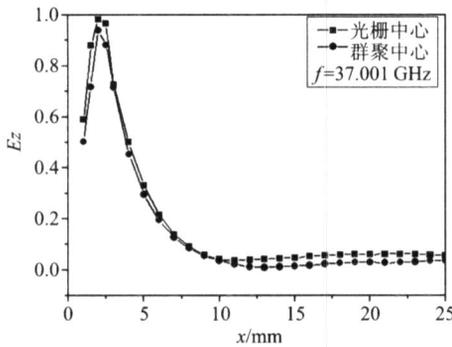


图 8 在光栅中心及群聚中心位置上,垂直于光栅表面慢波的纵向电场分布

Fig 8 The longitudinal electric field distribution of surface slow-wave, it is a vertical direction of grating and located at the center of grating and bunching

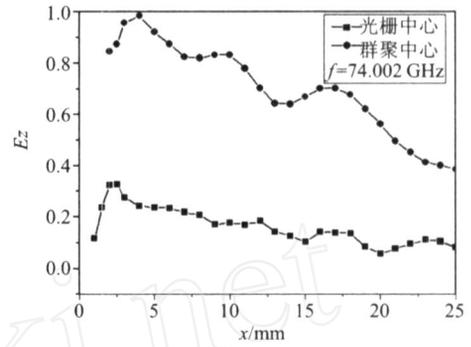


图 9 在光栅中心及群聚中心位置上,垂直于光栅表面慢波的二次谐波纵向电场分布

Fig 9 The longitudinal electric field distributions of the second harmonics of surface slow-wave, it is a vertical direction of grating and located at the centers of grating and bunching

表 2 表面慢波的同步频率和史密斯-帕塞尔 (SP) 辐射波频率及角度

Table 2 The synchronous frequency of surface slow-wave and the frequency of SP and angle

	阶数	理论		模拟	
		$f$		$f$	
表面慢波	/	37.618GHz	/	37.001GHz	/
SP 辐射波	1	75.236GHz	66.62°	74.002GHz	65.81°
	1	112.854GHz	21.82°	111.003GHz	22.86°
	2	112.854GHz	97.75°	111.003GHz	99.81°

图 7 为距离为光栅中心为 7cm、角度为 66 的观察点  $B_y$  分量对应的 FFT 频谱图。图中各谱线对应的频率依次为: 37.001GHz, 74.002GHz, 111.003GHz 其中第一条谱线的频率与图 2、3 中理论分析得到同步点的频率基本一致,说明在同步点附近是电子注与表面慢波相互作用。在角度 66°、7cm 的位置,表面慢波的幅值不是接近于零,说明表面慢波也能以一定的形式辐射出去,主要原因是光栅的有限尺寸使得表面慢波在其端头产生辐射。第二、第三条谱线显然对应于表面慢波的二次、三次谐波,其频率比理论值有一点降低,主要是在理论计算没有考虑空间电荷效应及光栅有限长度等因素在内,而在模拟程序自动的就考虑了这些因素,所以在频率上有点差异。

图 8 表示在光栅中心及群聚中心位置上,垂直于光栅的表面慢波纵向电场分布。由图 9 可知表面慢波离开光栅表面之后,在电子注区域电场迅速增加,在离开电子区域后,电场是基本上呈指数衰减的,可以认为表面慢波是非辐射的凋落波。

图 9 表示垂直光栅的表面慢波的二次谐波纵向电场分别在光栅中心及群聚中心的分布。从图中可以看出,谐波随着光栅表面距离的增加,纵向电场在

垂直方向不断的减少,但是衰减形式不是呈指数衰减,可以认为是辐射波。在光栅中心及群聚中心位置上,前者电子的群聚比后者要弱,因此在光栅中心位置的谐波辐射场相对群聚中心的辐射场要弱些,幅值相对要低些。以光栅中心为圆心,7cm 为半径,在光栅表面的辐射区域,沿光栅逆时针方向每 2 设置了一个观察点,研究了史密斯-帕塞尔辐射波的  $B_y$  分量通过 FFT 变换后的幅值沿角向的分布情况,如图 10 中曲线 所示。根据表达式 (1),分别给出了史密斯-帕塞尔一阶、二阶辐射波长与角度的对应关系,如图 10 中的 所示。图中的 (a)、(b) 分别是史密斯-帕塞尔的一阶辐射与表面慢波的 2 次谐波、3 次谐波的交点,其对应的频率及角度分别是 74.002GHz, 65.81°; 111.003GHz, 22.86°; (c) 点表示史密斯-帕塞尔的二阶辐射与表面慢波的 3 次谐波的交点,其对应的频率及角度分别是 111.003GHz, 99.81°。从图中可以看出,在 (a)、(b) 及 (c) 三点位置上,由于表面慢波的谐波同史密斯-帕塞尔辐射波发生了相干辐射,从而使得在这 3 个位置上辐射较强,而在其它位置上,辐射相对弱些。表 2 给出了通过理论和模拟得到的表面慢波同步频率与史密斯-帕塞尔辐射波频率及角度。表面慢波的理论频率是通过图 2 色散曲线的同步点得到的,而史密斯-帕塞尔辐射波的理论频率和角度是通过公式 (1) 计算得到的。从表 2 的理论和模拟数据可以看出,由于表面慢波使电子注群聚而产生相干史密斯-帕塞尔辐射的频率是表面慢波频率的整数倍,辐射频率的幅值峰值点与史密斯-帕塞尔效应预期的角度基本一致。由于光栅的有限长度及空间电荷效应的影响,使得模拟得到的频率及角度相

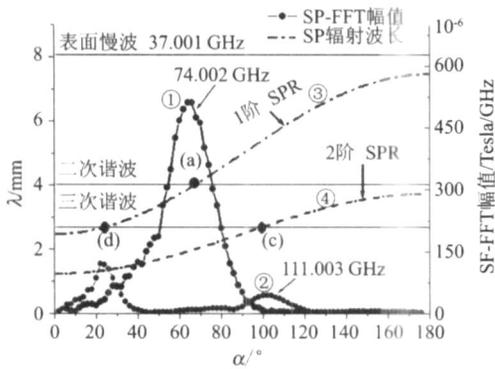


图 10 史密斯-帕塞尔辐射波长与角度的变化关系及辐射波的  $B_y$  分量经过 FFT 变换后幅值随角度的变化

Fig 10 The SP radiation wavelength and the peak of  $B_y$  through the FFT as a function of angle

对理论计算结果存在一定的差异。

#### 4 结语

本文采用理论分析和粒子模拟相结合的方法研究了毫米波段平板矩形光栅的史密斯-帕塞尔超辐射特性。研究表明:由于表面慢波参与注波相互作用,使电子注发生周期性电子群聚,群聚束团经过光栅表面时激发出相干的史密斯-帕塞尔辐射,其辐射频率为电子注与光栅表面慢波相互作用同步点频率的整数倍,其辐射角度方向与史密斯-帕塞尔公式所预期的基本一致;进一步研究表明表面慢波在垂直于光栅表面方向是快速衰减的凋落波,它不具有史密斯-帕塞尔辐射的特点,但是由于光栅的有限长度,表面慢波在光栅端头也能一定的形式辐射出去;而表面慢波的谐波在传输中并不呈指数性衰减,可以认为是辐射波。至于优化电子注及光栅参数,产生理想的群聚束团,得到最佳的辐射特性,这一步部分工作正在进行中。本文的研究结果对发展新型毫米波相干辐射源有一定的参考价值。

#### REFERENCES

- [1] Smith S J, Purcell E M, Visible light localized surface charges moving across a grating [J]. *Phys Rev*, 1953, **92**: 1069—1069.
- [2] Van den Berg P M. Smith-Purcell radiation from a point charge moving parallel to a reflection grating [J]. *J. Opt Soc Am.*, 1973, **63** (12), 1588—1597.
- [3] Van den Berg P M. Smith-Purcell radiation a line charge moving parallel to a reflection grating [J]. *J. Opt Soc Am.*, 1973, **64** (3), 689—698.
- [4] Umeta J, Goldstein M, Kimmitt M F, *et al* Super-radiation Smith-Purcell emission [J]. *Phys Rev Lett*, 1998, **80** (3), 516—519.
- [5] Li D, Yang Z, Inasaki K, *et al* Particle-in-cell simulation of coherent and superradiant Smith-Purcell radiation [J]. *Phy. Rev*, special topics-accelerator and beams, 2006, 9: 040701-1-040701-6.
- [6] Donohue J T, Garadlle J. Simulation of Smith-Purcell terahertz radiation using a particle-in-cell code [J]. *Phy. Rev*, special topics-accelerator and beams, 2006, 9: 060701-1-060701-7.
- [7] Andrews H L, Boulware C H, Brau C A, *et al* Superradiant emission of Smith-Purcell radiation [J]. *Phy. Rev*, special topics-accelerator and beams, 2005, **8**: 110702-1-110702-14.
- [8] Shiozawa T, Sata M. Efficiency enhancement in a Smith-Purcell free-electron laser [J]. *Appl Phys Lett*, 1995, **66** (2), 124—126.
- [9] GONG Yu-Bin, LU Zhi-Gang, WANG Guan-Jun, *et al* Study on mm-wave rectangular grating traveling wave tube with sheet-beam [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (宫玉彬, 路志刚, 王冠军, 等. 带状束矩形栅毫米波行波管的研究. *红外与毫米波学报*), 2006, **25** (3): 173—178.
- [10] LU Zhi-Gang, WEI Yan-Yu, GONG Yu-Bin, *et al* Study on step-loaded rectangular waveguide grating slow-wave system [J]. *J. Infrared Millim. Waves* (路志刚, 魏彦玉, 宫玉彬, 等. 阶梯加载矩形波导栅慢波系统的研究. *红外与毫米波学报*), 2006, **25** (5): 349—354.
- [11] Liu W X, Yang Z Q, Liang Z, *et al* Two-Stream Smith-Purcell Free-Electron Laser [J]. *Nucl Instrum. Methods Phys Res, Sect A*, 2007, **570** (1), 171—175.
- [12] DI Jun, ZHU Da-Jun, LU Sheng-Gang. Electromagnetic field algorithms of CHIPIC code [J]. *Journal of UEST of China* (狄隽, 祝大军, 刘盛纲. CHIPIC软件的电磁场计算方法. *电子科技大学学报*), 2005, **34** (4), 485—488.