

实心注在等离子体介质筒产生的 切伦可夫辐射*

吴坚强 刘盛纲[△] 莫元龙

(电子科技大学高能电子学研究所, 四川, 成都, 610054)

053

A **摘要** 利用自洽线性场理论, 考虑电子的三维扰动, 分析了轴向实心相对论电子注通过填充背景等离子体介质筒慢波波导产生的切伦可夫辐射, 导出了描述其不稳定性的色散方程和注波互作用的同步条件, 求得电磁波辐射的时间增长率, 分析了背景等离子体密度和实心电子注半径对波增长率的影响.

关键词 实心电子注, 等离子体, 介质筒, 切伦可夫辐射.

引言

将相对论电子注注入慢波结构中可产生有效的高功率微波辐射; 而在慢波结构中充填适当密度的背景等离子体可有效地提高器件的注波相互作用效率、工作频率和输出功率^[1-4], 这使填充背景等离子体的高功率微波源的研究成为一新的热点, 引起了各国学者的关注.

1987年, Kuzelev M V 等^[1]用 0.9kA、0.4MV 相对论电子注, 由等离子体切伦可夫脉塞产生了 0.1GW 的微波, 效率为 20%; De Groot J S, *et al*^[2]用等离子体切伦可夫脉塞作放大器, 得到了输出功率达 GW 的微波, 效率大于 10%; 而最具影响的实验 Carmel Y, *et al*^[3,4]将等离子体注入相对论返波管中, 得到输出功率 600MW, 效率达 40%, 效率比未充等离子体的同类器件提高了近 8 倍.

令人振奋的实验结果推动了理论研究的深入发展^[5-10]; 但尚有许多问题有待于进一步的研究, 如束等离子体相互作用机理、三波相互作用机理等. 本文结合我们即将开展的等离子体介质筒切伦可夫脉塞的实验结构, 利用自洽线性场理论, 从理论上分析了轴向实心相对论电子注通过填充等离子体的介质筒慢波波导激励的切伦可夫辐射, 导出了电子注与 E 模互作用的色散方程, 由此求得了波增长率, 并进行了计算和讨论, 为此类器件的工程提供了一定的理论依据.

1 扰动场作用下电子的三维扰动

图 1 为注波相互作用区示意图. 设实心相对论电子注的平衡速度为 v_0 、半径为 R_0 , 沿系统对称轴 z 进入填充等离子体密度为 n_{p0} 的介质筒慢波波导中; 其平衡密度可描述为

$$n_0(r) = n_{e0} H(r - R_0), \quad (1)$$

式(1)中, n_{e0} 为电子注的平衡密度; H 为阶跃函数. 设背景等离子体与介质筒内壁间没有空

* 国家自然科学基金资助项目和国家 863 项目

本文 1995 年 8 月 14 日收到, 修改稿 1996 年 1 月 16 日收到

隙,且不考虑纵向引导磁场的作用.将电子注的密度 n 和速度 \vec{v} 表示为

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \delta n, \\ \vec{v} &= v_0 \vec{e}_x + \delta \vec{v}, \end{aligned} \quad (2)$$

这里, $\delta n \leq n_0$, $\delta v \leq v_0$; 这样就得到线性化的连续性方程和运动方程分别为

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta n + n_0 \nabla \cdot \delta \vec{v} &= 0, \quad (3) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta \vec{v} &= - \frac{e}{r_0 m_0} \left[(I - \beta_0^2 \vec{e}_x \vec{e}_x) \right. \\ &\quad \left. \cdot \delta \vec{E} + v_0 \vec{e}_x \times \delta \vec{B} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)中, e 和 m_0 分别为电子的电荷和静止质量, $\beta_0 = v_0/c$; $r_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}$ 为相对论因子; $\delta \vec{E}$ 和 $\delta \vec{B}$ 分别为扰动的电场和磁场, I 为单位张量, \vec{e}_x 为轴向上的单位矢量. 由于系统具有角向对称, 则所有的扰动量可表示为

$$\delta F(r, z, t) = \delta f(r) e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (5)$$

式(5)中, ω 和 β 分别为角频率和纵向波数. 将式(5)代入式(3)和(4)中, 采用柱坐标系 (r, φ, z) , 并利用麦克斯韦方程将磁场用电场表示, 就可求得电子的扰动速度 $\delta \vec{v}$ 和扰动密度 δn , 继而得到实心电子注上的扰动电流密度:

$$\begin{aligned} \delta J_r &= \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} H(r - R_b) \left[-j \delta E_r + \frac{v_0}{\omega - \beta v_0} \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right], \\ \delta J_\varphi &= -j \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} H(r - R_b) \delta E_\varphi, \\ \delta J_z &= -j \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega - \beta v_0)^2} H(r - R_b) \left\{ \frac{\omega}{r_0^2} \delta E_z - \frac{v_0}{\omega} \left[-j(\omega - \beta v_0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta E_r) + v_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

和扰动电荷密度

$$\delta \rho = -j \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega - \beta v_0)^2} H(r - R_b) \left\{ \frac{\beta \delta E_z}{r_0^2} - \frac{1}{\omega} \left[-j(\omega - \beta v_0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta E_r) + v_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right) \right] \right\}. \quad (7)$$

式(6)和式(7)中, $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{r_0 m_0 \epsilon_0}$; ϵ_0 为自由空间介电常数.

扰动场对背景等离子体中电子的作用, 只要在式(6)和式(7)中令 $v_0 = 0$, 就可得等离子体中的扰动电流密度:

$$\delta \vec{J}_p = -j \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \delta \vec{E}, \quad (8)$$

扰动电荷密度 $\delta \rho_p$ 为

$$\delta \rho_p = -j \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\{ \beta \delta E_z + j \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \delta E_r) \right\}. \quad (9)$$



图1 注波相互作用区示意图
Fig. 1 Schematic of the beam-wave interaction region

式(8)和式(9)中, $\omega_p^2 = \frac{n_p q^2}{m_0 \epsilon_0}$; 下标 p 为等离子体的参量. 在实心电子注存在的区域, 扰动场产生的总扰动电流密度和总扰动电荷密度为上述两部份扰动电流密度和扰动电荷密度之和.

2 色散方程

为了使电子与场产生有效相互作用, 使电子在纵向群聚而将能量交给场, 则其场必须具有纵向分量; 因此这里只讨论电子与 TM 模的相互作用. 将以上求得各扰动电流密度和电荷密度分区(见图 1)代入波方程中, 可得纵向扰动电场满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right) - T^2 \delta E_z = 0, & (0 \leq r \leq R_0) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right) - p^2 \delta E_z = 0, & (R_0 < r \leq a) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \delta E_z}{\partial r} \right) + q^2 \delta E_z = 0, & (a < r \leq b). \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中,

$$p^2 = \beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right), \quad (11)$$

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_r - \beta^2, \quad (12)$$

$$T^2 = U \left[\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \right) \right]. \quad (13)$$

式(12)中, ϵ_r 为介质筒的相对介电常数; 式(13)中

$$U = 1 + \frac{\frac{v_0^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega_b^2}{(\omega - \beta v_0)^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{r_0^2 (\omega - \beta v_0)^2} - \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{v_0^2}{c^2} \frac{\omega_b^2}{(\omega - \beta v_0)^2} \right]}. \quad (14)$$

式(10)的解可表示为

$$\delta E_z = \begin{cases} AI_0(Tr) & (0 \leq r \leq R_0) \\ BI_0(pr) + CK_0(pr); & (R_0 < r \leq a) \\ DJ_0(qr) + EY_0(qr); & (a < r \leq b), \end{cases} \quad (15)$$

式(15)中, I_0 和 K_0 分别为零阶第一类和第二类虚宗量贝塞尔函数; J_0 和 Y_0 分别为零阶第一类和第二类贝塞尔函数. 利用电场切向连续性条件和波导壁边界条件, 且注意在等离子体与介质筒的分界面上和等离子体与电子注的分界面上, 均有边界条件 $\int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \delta \rho dV$, 这样消去式(15)中的未知系数, 就可得色散方程为

$$\frac{I_0(TR_0)}{I_1(TR_0)} = S \frac{p}{T} \frac{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) B(qb, qa) C(pR_0, pa) + \frac{p\epsilon_r}{q} A(qb, qa) D(pR_0, pa)}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) B(qb, qa) E(pR_0, pa) + \frac{p\epsilon_r}{q} A(qb, qa) C(pa, pR_0)}. \quad (16)$$

式(16)中,

$$S=U\left[1-\frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2(\omega-\beta v_0)^2}-\frac{v_0^2}{c^2}\frac{\omega_p^2\omega_b^2}{\omega\beta v_0(\omega-\beta v_0)^2}\right]. \quad (17)$$

这里定义

$$A(x,y)=J_0(x)Y_1(y)-J_1(y)Y_0(x), \quad (18)$$

$$B(x,y)=J_0(x)Y_0(y)-J_0(y)Y_0(x), \quad (19)$$

$$C(x,y)=I_0(x)K_1(y)+I_1(y)K_0(x), \quad (20)$$

$$D(x,y)=I_0(x)K_0(y)-I_0(y)K_0(x), \quad (21)$$

$$E(x,y)=I_1(x)K_1(y)-I_1(y)K_1(x). \quad (22)$$

3 波增长率

为了得到注波相互作用产生的波增长率,利用产生切伦可夫辐射的条件^[3],即 $\omega-\beta v_0 \approx 0$,可将色散方程(16)近似表示为

$$\left[I_1(pa)B(qb,qa) - \frac{p}{q} \frac{\epsilon_r}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} I_0(pa)A(qb,qa) \right] (\omega-\beta v_0)^2 = \frac{\omega_b^2}{\gamma_0^2} \frac{p\chi}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} I_1(TR_b), \quad (23)$$

式(23)中

$$X = \frac{(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2})B(qb,qa)C(pR_b,pa) + \frac{p}{q}\epsilon_r A(qb,qa)D(pR_b,pa)}{TI_0(TR_b)K_1(pR_b) + pI_1(TR_b)K_0(pR_b)}. \quad (24)$$

如果电子注不存在,即令 $\omega_b \rightarrow 0$,则由色散方程(23),可得

$$F_1 = I_1(pa)B(qb,qa) - \frac{p}{q} \frac{\epsilon_r}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} I_0(pa)A(qb,qa) = 0, \quad (25)$$

$$F_2 = \omega - \beta v_0 = 0. \quad (26)$$

式(25)为填充等离子体的介质简慢波波导 TM_{0n} 的色散方程^[10],式(26)为电子注模的色散方程;因此,式(23)清楚地表明,切伦可夫辐射来源于慢波系统中的波导模与电子注模的耦合,而且耦合的强度与电子注的密度成正比;当同时满足式(25)和(26)时,注波相互作用就可产生切伦可夫辐射,电子将能量交给波,使波得到增长.因此式(25)和(26)就是产生切伦可夫辐射的同步条件.设联立求解式(25)和(26)得到的工作频率为 ω_r ,令 $\omega = \omega_r + \delta\omega$,其中 $\delta\omega \ll \omega_r$,则由耦合方程(23)就可得

$$\delta\omega^3 = \frac{\omega_b^2}{\gamma_0^2} \frac{p\chi}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \frac{I_1(TR_b)}{\frac{\partial F_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r}}. \quad (27)$$

式(27)中

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega} = 2 \frac{\omega_p^2}{\omega^3} - \frac{\epsilon_r \omega}{c^2 q^2} \frac{A(qb,qa)I_0(pa)}{B(qa,qb)I_1(pa)} \left\{ 2 \frac{q}{p} + \epsilon_r \frac{p}{q} + qa \left[\frac{I_1(pa)}{I_0(pa)} - \frac{I_0(pa)}{I_1(pa)} \right] + \epsilon_r p \left[\frac{qbW(qa,qb) - qaB(qa,qb) - A(qb,qa)}{qA(qb,qa)} + \frac{bA(qa,qb) - aA(qb,qa)}{B(qa,qb)} \right] \right\}. \quad (28)$$

式(28)中

$$W(x, y) = J_1(x)Y_1(y) - J_1(y)Y_1(x). \quad (29)$$

求解方程(27),就可得波增长率 G 为

$$G = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\omega_p^2}{\gamma_0^2} \frac{p\chi}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_p}} I_1(TR_0) \right]^{1/3}. \quad (30)$$

4 计算与讨论

由式(25)计算了等离子体密度对填充等离子体介质慢波波导中 TM_{01} 模色散特性的影响,结果如图 2 所示;由图 2 可见,随着等离子体密度的提高,其频率也随之提高.图 3 给出了以等离子体密度为参量的 TM_{01} 模波增长率与加速电压的关系,由图 3 可见,在给定的各参量下,波增长率随等离子体密度的提高而增加;这与实验中已证实的背景等离子体可增强注波相互作用效率一致^[1~3].图 4 给出了注半径对 TM_{01} 模波增长率的影响,可见随着电子注半径增加而向介质筒内表面靠近时,其波增长率随之增加,这是因为纵向电场在介质筒的内表面上分布最大^[10],所以当电子注靠近介质筒的内表面时,由于纵向电场的增加而加强了其注波相互作用,故其波增长率增加.因此,在设计实际器件时,电子注应尽量靠近介质筒的内表面.

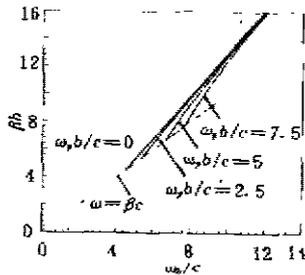


图 2 等离子体密度对色散特性的影响

($\epsilon_r = 2.1, \frac{a}{b} = 0.8$)

Fig. 2 The effect of the plasma densities on the dispersion characteristics

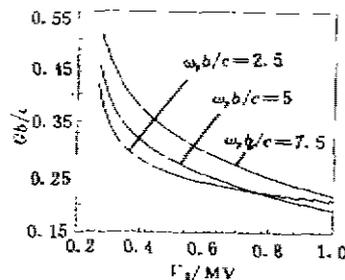


图 3 波增长率与加速电压的关系

($\epsilon_r = 2.1, \frac{a}{b} = 0.8, \frac{R_0}{b} = 0.6$)

Fig. 3 The wave growth rate versus the accelerating voltage

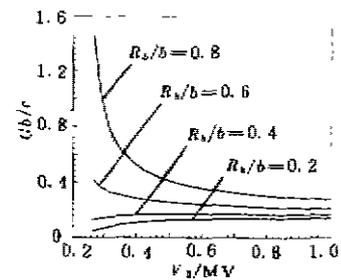


图 4 注半径对波增长率的影响

($\epsilon_r = 2.1, \frac{a}{b} = 0.8, \frac{\omega_p b}{c} = 2.5$)

Fig. 4 The effect of the beam-radius on the wave growth rate

5 结 语

本文利用自洽线性场理论,分析了实心相对论电子注在填充等离子体介质筒慢波波导中激励的切伦可夫辐射,导出了注波相互作用的色散方程(16)、耦合方程(23)和同步条件,并求得了波增长率;分析表明其注波相互作用是由填充等离子体的介质筒慢波波导中的 TM 模与电子注模通过电子注耦合所致,计算并讨论了等离子体密度对色散特性的影响,以及等离子体密度和电子注位置对波增长率的影响,从理论上证明了填充适当密度的背景等离子体确实可有效地提高介质切伦可夫脉塞的输出频率、注波相互作用效率和功率,为此类器件工程

设计提供了一定的理论依据.

参考文献

- 1 Kuzlev M V, *et al. Sov. J. plasma Phys.*, 1987, **13**(11):793~800
- 2 De Groot J S, *et al. SPIE*, 1988, **873**:37~50
- 3 Carmel Y, *et al. IEEE Trans. on Plasma Science*, 1990, **18**(3):497~506
- 4 Carmel Y, *et al. Phys. Rev. Lett.*, 1989, **62**(20):2389~2392
- 5 Kosai H, *et al. SPIE*, 1990, **1226**:191~198
- 6 Peter W, *et al. Phys. Rev. A*, 1992, **45**(12):8833~8841
- 7 Botton M, *et al. Phys. Fluids B*, 1992, **4**(7):1979~1988
- 8 Weatherall J C, *et al. Phys. Fluids B*, 1992, **4**(7):1953~1965
- 9 Choyal, *et al. Phys. Plasmas*, 1994, **1**(1):171~175
- 10 吴坚强,熊彩东,刘盛纲. *电子科技大学学报*, 1995, **24**(3):277~281

CHERENKOV RADIATION PRODUCED BY A SOLID ELECTRON BEAM IN A PLASMA-FILLED DIELECTRIC LINER*

Wu Jianqiang Liu Shenggang Mo Yuanlong

(High Energy Electronics Institute, University of Electronic Science
and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract Cherenkov radiation produced by an axial solid relativistic electron beam in a plasma-filled dielectric-lined slow wave waveguide was analyzed by the use of the self-consistent linear field theory considering the three-dimensional perturbation of electrons. The dispersion equation, which describes the instability, and the simultaneous condition of the beam-wave interaction were derived. Finally, the growth rate of the wave was obtained, and the effects of the background plasma density and the electron beam radius on the growth rate of the wave were presented.

Key words solid electron beam, plasma, dielectric liner, Cherenkov radiation.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China and the 863 Project.