

色散腔失谐情况广义环形腔双稳系统分析

樊锡君 王象泰 于洛平 田淑芬

(山东师范大学物理系, 山东, 济南, 250014)

摘要: 给出了在色散腔失谐情况下光场具有横向分布的广义环形腔双稳系统的定态解, 分析了系统的稳定性, 指出了与普通环形腔双稳系统及纯吸收腔共振情况下的广义环形腔双稳系统在定态及失稳性方面的差别.

关键词: 广义环形腔, 色散, 失谐, 光学双稳, 失稳性.

引言

二十多年来, 展现光学双稳性^[1]的光学双稳系统的实验与理论研究一直是量子光学最活跃的研究领域之一. 其中双稳系统的不稳定性行为是讨论的重要内容之一. 在光学双稳的理论研究中, 人们广泛采用普通环形腔模型^[2-12], 近年来人们又相继提出了某些新的环形腔模型^[13-18], 得到了一些具有重要意义的新结果. 我们在文献 [19] 中, 使用广义环形腔模型研究了纯吸收腔共振情况下具有横向分布光场的双稳系统的定态行为及失稳性. 本文把以上讨论推广到更实际的情况, 即光学介质具有色散性质、腔频与入射场频率不完全相等的情况.

1 色散腔失谐情况下的定态解

图 1 是总长为 L 的广义环形腔双稳系统. 腔镜 1 和 2 的透射率分别为 T_1 和 T_2 , 镜 3 和镜 4 为全反射镜. 腔内长度为 L 、半径为 R 的圆柱形原子样品由均匀展宽的二能级原子系统组成. 原子跃迁频率为 ω_a , 纵向和横向衰减速率分别为 γ_{\parallel} 和 γ_{\perp} , 入射场为 TEM_{00} 模, 频率为 ω_0 , 腔内场亦为 TEM_{00} 模. E_{OI} 和 E_{OT} 分别为入射和透射光场. 假定光束半径沿着激活区大小是不变的, 这个条件在实验中是可以满足的^[20,21]. 这样慢变电场振幅 $E_0(z, t)$, 原

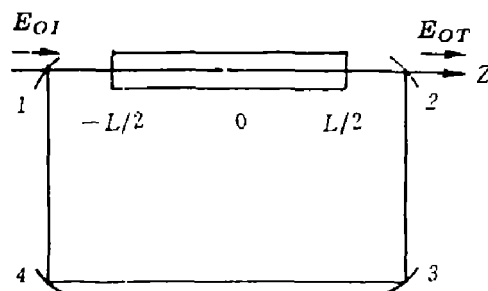


图 1 广义环形腔双稳系统
Fig. 1 General ring cavity
bistable system

子极化 $P(\bar{r}, z, t)$ 和布居数差 $D(\bar{r}, z, t)$ 服从 Maxwell-Bloch 方程组:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_0 + C \frac{\partial}{\partial z} E_0 = -\alpha C \int_0^{R/w_0} d\bar{r} \cdot 4\bar{r} \exp(-\bar{r}^2) P, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P = -\gamma_{\perp} \{ D E_0 \exp(-\bar{r}^2) - P(1 + i\phi) \}, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} D = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} (P E_0^* - P^* E_0) \exp(-\bar{r}^2) + D - 1 \right\}. \quad (1c)$$

关于 E_0^* 和 P^* 的运动方程分别是 (1a) 和 (1b) 的复数共轭方程, 光场 E_0 满足边界条件

$$\begin{cases} E_{OT}(t) = \sqrt{T_2} E_0(L/2, t), \\ E_0(-L/2, t) = \sqrt{T_1} E_{OI}(t) + \sqrt{R_1 R_2} e^{-i\delta_0} E_0(L/2, t - \Delta t). \end{cases} \quad (2)$$

在方程组 (1) 和式 (2) 中, $\bar{r} \equiv r/w_0$, r 为径向坐标, w_0 为光束束腰, α 是共振线性吸收系数, c 表示光速, $\phi = (\omega_a - \omega_0)/r_{\perp}$ 为原子失谐参量, δ_0 为腔失谐能量, $\delta_0 = \mathcal{L}(\omega_c - \omega_0)/c$, ω_c 是最接近共振的腔频率, $R_1 = 1 - T_1$, $R_2 = 1 - T_2$.

引入平均场近似^[19], 则利用方程组 (1) 和边界条件 (2) 可得输入光场 y 与透射光场定态模振幅 x 的关系为

$$y = \sqrt{M}|x| \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) + \frac{2CQ}{M|x|^2} \right] + \left(\theta - \frac{2C\phi Q}{M|x|^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

式 (3) 中

$$\begin{cases} M \equiv \frac{T_1}{T_2}, C = \frac{\alpha L}{2\pi}, \theta = \frac{\delta_0}{T_1}; \\ Q = \ln \left[\frac{1 + \phi^2 + M|x|^2}{1 + \phi^2 + M|x|^2 \exp(-2R^2/w_0^2)} \right]. \end{cases} \quad (4)$$

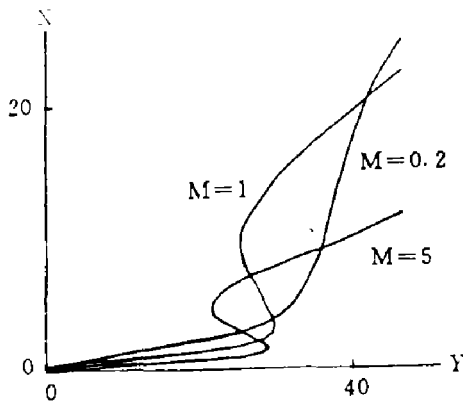


图 2 在色散腔失谐情况下 M 值变化对定态曲线的影响
($\phi = 1, \theta = 2, C = 30, K = 0.5, R/w_0 = 20$)

Fig. 2 The effect of M value on steady-state curve in the dispersion and cavity detuning case

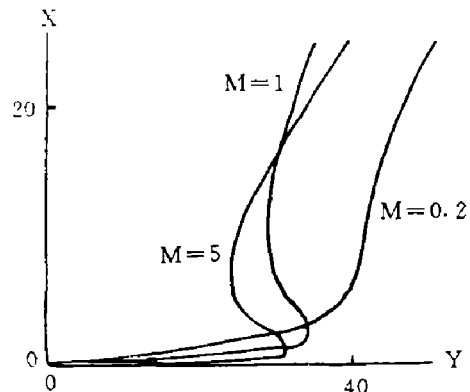


图 3 在纯吸收腔共振情况下 M 值变化对定态曲线的影响
($\phi = 0, \theta = 0, C = 30, K = 0.5, R/w_0 = 20$)

Fig. 3 The effect of M value on steady-state curve in the pure absorption and cavity resonance case

式 (3) 中取 $M=1$ 便得到普通环形腔双稳系统在色散腔失谐时的定态方程^[5,22-24]; 在式 (3) 中取 $\phi=\theta=0$ 则得到纯吸收腔共振情况下广义环形腔双稳系统的定态方程^[9].

我们依据式 (3) 讨论入射端与透射端腔镜透射率之比 M 的数值变化对系统工作状态的影响. 从图 2 可见, 改变 M 的取值可使双稳区的位置和大小发生明显的变化, 甚至使定态曲线变成完全无双稳区的光放大曲线. 这表明仅仅调节 M 的取值便能使双稳器件的工作区域发生改变, 甚至使其从具有记忆元件的功能转变成具有入射光交变信号微分放大器的功能. 将图 2 与图 3 纯吸收腔共振时的相应情况相比可以发现, ϕ 及 θ 数值的改变亦对系统的工作状态产生显著的影响. 我们的研究表明: 当 C 、 M 和 R/w_0 的值保持不变时, 增大 ϕ 值会使双稳区减小, 而增大 θ 值则使双稳区变大. 但从应用的角度看, 在某些情况下, 改变系统的工作状态, 通过改变 M 取值的大小要比借助改变 ϕ 及 θ 值的变化更为方便.

2 稳定性分析

为了考察定态解的稳定性, 我们引进对定态解 $E_{0s}(z)$, $P_s(\bar{r}, z)$ 和 $D_s(\bar{r}, z)$ 的偏离量

$$\delta A = A - A_s, \quad (5)$$

式 (5) 中, A 分别代表 $E_0(z, t)$, $P(\bar{r}, z, t)$ 和 $D(\bar{r}, z, t)$; A_s 分别代表 E_{0s} , P_s 和 D_s . 偏离量 $\delta E(z, t)$ 服从边界条件

$$\delta E(-L/2, t) = \sqrt{R_1 R_2} \delta E(L/2, t - \Delta t). \quad (6)$$

将式 (5) 代入方程组 (1) 并进行线性化得

$$\frac{\partial \delta E}{\partial t} + C \frac{\partial \delta E}{\partial z} = -\alpha C \int_0^{R/w_0} d\bar{r} \cdot 4\bar{r} \exp(-\bar{r}^2) \delta p, \quad (7a)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \gamma_{\perp} \{ [D_s \delta E + E_{0s} \delta D] \exp(-\bar{r}^2) - (1 + i\phi) \delta p \}, \quad (7b)$$

$$\frac{\partial \delta D}{\partial t} = -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} [P_s \delta E^* + E_{0s}^* \delta p + p_s^* \delta E + E_{0s} \delta p^*] \exp(-\bar{r}^2) - \delta D \right\}, \quad (7c)$$

δE^* 和 δp^* 分别满足式 (7a) 和 (7b) 的复共轭方程. 我们寻求式 (7) 以下形式解:

$$\left. \begin{array}{l} \partial E(z, t) \\ \partial E^*(z, t) \\ \partial p(\bar{r}, z, t) \\ \partial p^*(\bar{r}, z, t) \\ \partial D(\bar{r}, z, t) \end{array} \right\} = \exp(\Omega t) \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\delta E}(z), \\ \widetilde{\delta E}^*(z), \\ \widetilde{\delta p}(\bar{r}, z), \\ \widetilde{\delta p}^*(\bar{r}, z), \\ \widetilde{\delta D}(\bar{r}, z). \end{array} \right. \quad (8)$$

为了讨论定态失稳情况, 关键在于找出失稳边界, 在此处 $R_e\Omega = 0$. 我们令

$$\Omega = i\rho \quad (\rho \text{ 为实数}), \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (8) 后, 并将式 (8) 代入方程组 (7), 经过基本而冗长的计算后得到以下线性齐次方程组

$$\left[i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) + i\theta \right] \delta\tilde{E} + 2C[\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M)\delta\tilde{E} + (E_{0s})^2 H(\rho', x, \phi, \gamma', M)\delta\tilde{E}^*] = 0, \quad (10a)$$

$$\left[i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) - i\theta \right] \delta\tilde{E}^* + 2C[\Gamma(\rho', x, -\phi, \gamma', M)\delta\tilde{E}^* + (E_{0s}^*)^2 H(\rho', x, -\phi, \gamma', M)\delta\tilde{E}] = 0, \quad (10b)$$

式 (10) 中

$$\rho' = \frac{\rho}{\gamma_{\perp}}, \quad K = \frac{cT_1/\mathcal{L}}{\gamma_{\perp}}, \quad \gamma' = \frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}}, \quad (11)$$

函数 $\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M)$ 和 $H(\rho', x, \phi, \gamma', M)$ 的具体形式见附录.

很显然, 方程组 (10) 有非零解的必要条件为

$$\begin{aligned} & \left[i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) + i\theta + 2C\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M) \right] \\ & \cdot \left[i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) - i\theta + 2C\Gamma(\rho', x, -\phi, \gamma', M) \right] \\ & = 4C^2 M^2 x^2 H(\rho', x, \phi, \gamma', M) H(\rho', x, -\phi, \gamma', M). \end{aligned} \quad (12)$$

为了便于求解方程 (12), 我们引入两个辅助函数

$$\Gamma_1(\rho', x, \phi, \gamma', M) = \frac{1}{2}[\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M) + \Gamma(\rho', x, -\phi, \gamma', M)], \quad (13a)$$

$$\Gamma_2(\rho', x, \phi, \gamma', M) = \frac{1}{2}[\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M) - \Gamma(\rho', x, -\phi, \gamma', M)]. \quad (13b)$$

于是方程 (12) 可以写为

$$\begin{aligned} & \left[i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) + 2C\Gamma_1(\rho', x, \phi, \gamma', M) \right]^2 \\ & = 4C^2 M^2 x^4 H(\rho', x, \phi, \gamma', M) \cdot H(\rho', x, -\phi, \gamma', M) \\ & \quad - [\theta - i2C\Gamma_2(\rho', x, \phi, \gamma', M)]^2. \end{aligned} \quad (14)$$

再把方程 (14) 的右端写成 $\Psi(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta)$ 的形式, 则可得到

$$i\frac{\rho'}{K} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) + 2C\Gamma_1(\rho', x, \phi, \gamma', M) = \pm \Psi^{\frac{1}{2}}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta). \quad (15)$$

把方程 (15) 改写成分别由其实部和虚部组成的两个方程:

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{M} \right) = A_{\pm}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta), \quad (16a)$$

$$\rho' = KB_{\pm}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta). \quad (16b)$$

式 (16) 中

$$A_{\pm}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta) = \operatorname{Re}[\pm \Psi^{\frac{1}{2}}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta) - 2C\Gamma_1(\rho', x, \phi, \gamma', M)], \quad (17a)$$

$$B_{\pm}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta) = \operatorname{Im}[\pm \Psi^{\frac{1}{2}}(\rho', x, \phi, \gamma', M, C, \theta) - 2C\Gamma_1(\rho', x, \phi, \gamma', M)]. \quad (17b)$$

我们按照方程 (16a) 和 (16b) 来确定稳定性边界 (为方便起见, 在式 (16a) 和 (16b) 中同时取正号):

对一个选定的 x 值, 除 ρ' 以外其它参量均不变, 利用图解法求出式 (16b) 关于 ρ' 的解, 并以 $\rho'(x)$ 表示以这个方式得到的解, 若 $\rho' = \rho'(x)$ 使方程 (16a) 成立, 则这个选择的 x 值就正好位于失稳边界上, 否则我们就需要改变 x 的取值, 重复以上步骤, 直到满足要求为止.

3 结论

我们考虑 $R/w_0 \rightarrow \infty$ 在极限情况下, 色散腔失谐广义环形腔双稳系统的失稳性. 研究结果如下:

与普通环形腔双稳系统 ($M=1$) 相比, 改变 M 的数值可以明显改变失稳范围的大小, 但不能改变失稳区所在的区域性质, 也就是说负斜率失稳区和正斜率失稳区的存在与 M 取值的变化无关.

相对于纯吸收腔共振的广义环形腔双稳系统, 色散腔失谐情况的广义环形腔双稳系统的失稳情况则较为复杂, 它与色散程度及腔失谐程度 (即 ϕ 和 θ 的取值情况) 密切相关. 在图 4 中我们给出了 $\phi-\theta$ 平面第二象限的一个区域中失稳情况的分布, 它把纯吸收腔共振情况作为一个特例包括在内 (对应 $\phi=0, \theta=0$ 的点). 图 5 给出了图 4 所表示的三种情况中的两种, 即定态曲线是 S 形, 且无正斜率失稳性出现和不存在双稳性但存在失稳行为. 我们发现在 $\phi-\theta$ 平面第一象限不出现定态曲线的正斜率失稳性, 当 ϕ 和 θ 具有

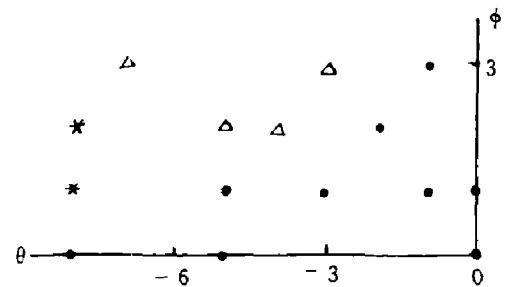


图 4 在 $\phi-\theta$ 平面上双稳和失稳分布情况 ($C=75, K=0.5, \gamma'=2, R/w_0 \rightarrow \infty$)

•: 定态曲线是 S 形且无正斜率失稳性出现
*: 不存在双稳性但存在失稳行为
Δ: 不存在双稳性和失稳性

Fig. 4 Distribution of bistability and instability on the $\phi-\theta$ plane ($C=75, K=0.5, \gamma'=2, R/w_0 \rightarrow \infty$)

相反符号且 C 值较小时, 正斜率失稳性可能出现, 而这对双稳性观察是不利的.

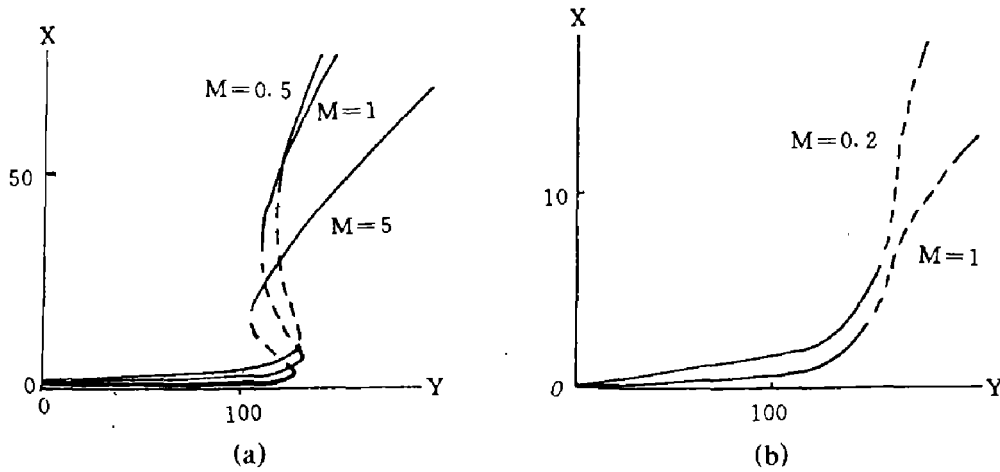


图 5 定态曲线上的失稳区 (点线)

(a) $\phi = 3, \theta = -1, C = 75, K = 0.5, \gamma' = 2, R/w_0 \rightarrow \infty$

(b) $\phi = 1, \theta = -9, C = 75, K = 0.5, \gamma' = 2, R/w_0 \rightarrow \infty$

Fig. 5 The unstable domain (the dotted line) on the steady state curve

附录

我们给出方程组 (12) 中函数 $\Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M)$ 和 $H(\rho', x, \phi, \gamma', M)$ 的具体形式:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho', x, \phi, \gamma', M) = & \frac{1}{Mx^2} \left\{ A_1 \left[\ln \frac{1 + \phi^2 + Mx^2}{1 + \phi^2 + Mx^2 \Sigma} \right] \right. \\ & + \frac{B_1}{2a} \ln \left[\frac{aM^2 x^4 + bMx^2 + f}{aM^2 x^4 \Sigma^2 + bMx^2 \Sigma + f} \right] \\ & \left. + \left[C_1 - \frac{bB_1}{2a} \right] \frac{2}{\Theta} \cdot \left[\arctan \left(\frac{2aMx^2 + b}{\Theta} \right) - \arctan \frac{2aMx^2 \Sigma + b}{\Theta} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (A1)$$

式 (A1) 中,

$$\Theta = (4af - b^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma = \exp[-2(R/w_0)^2]; \quad (A2)$$

$$a = \rho'^2(1 + \rho'^2), \quad b = 2\gamma'(g_1 + g_2\rho'), \quad f = g_1^2 + g_2^2; \quad (A3)$$

$$g_1 = -\rho'(\gamma' + 2) + \gamma'(1 + \phi), \quad g_2 = \rho'(-\rho' + 1 + \phi^2 + 2\gamma'); \quad (A4)$$

A_1, B_1 和 C_1 是线性代数方程组

$$\begin{cases} aA_1 + B_1 = m_1, \\ bA_1 + (1 + \phi^2)B_1 + C_1 = n_1, \\ cA_1 + (1 + \phi^2)C_1 = q_1 \end{cases} \quad (A5)$$

的解, 式 (A5) 中

$$m_1 = -\gamma'[i\rho'(1+i\phi)(1-i\rho')]/2, \quad (A6)$$

$$n_1 = \gamma'[i\rho'(1+i\phi)(g_1-ig_2)/2 + (1+\phi^2)\{\gamma' - \rho'(\rho' - \phi) + i[\rho' + \gamma'(\gamma' - \phi)]\}(1-i\rho')], \quad (A7)$$

$$q_1 = (1+\phi^2)(g_1-ig_2)\{\gamma' - \rho'^2 + \rho'\phi + i[\rho' + \gamma'(\gamma' - \phi)]\}. \quad (A8)$$

$Mx^2H(\rho', x, \phi, \gamma', M)$ 具有 (A1) 所示的形式, 只是其中的 A_1 , B_1 和 C_1 分别用 A_2 , B_2 和 C_2 来代替, A_2 , B_2 和 C_2 是与 (A5) 相同形式的线性代数方程组的解, 只是 (A5) 中的 m_1 , n_1 和 q_1 分别由 m_2 , n_2 和 q_2 所代替, 其明显形式为

$$m_2 = -\gamma'^2[2 + \rho'\phi + i(\rho' - 2\phi)](1-i\rho')/2, \quad (A9)$$

$$n_2 = -\gamma'^2(g_1-ig_2)[2 + \rho'\phi + i(\rho' - 2\phi)]/2, \quad q_2 = 0. \quad (A10)$$

参考文献

- 1 Gibbs HM *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 1976;**36**(1):113
- 2 Bonifacio R, Lugiato LA. *Lett. Nuovo Cimento*, 1978;**21**(15):510
- 3 Gronchi M, Lugiato LA. *Opt. Lett.*, 1980;**5**(3):108
- 4 Gronchi M *et al.* *Phys. Rev.*, 1981;**A24**(3):1419
- 5 Lugiato LA, Milani M. *Z. Phys.*, 1983;**B50**(2):171
- 6 Lugiato LA. In *Progress in Optics XXI*, edited by Wolf E Amsterdam: North-Holland, 1984, 183
- 7 Lugiato LA *et al.* *Phys. Rev.*, 1984;**A30**(3):1366
- 8 Lugiato LA, Narducci LM. *Phys. Rev.*, 1985;**A32**(3):1576
- 9 Ru P *et al.* *Opt. Commun.*, 1987;**63**(5):310
- 10 Hu Gang, Yang Gaojian. *Phys. Rev.*, 1988;**A38**(4):1979
- 11 樊锡君等. *光学学报*, 1989;**9**(6):501
- 12 Fan Xijun *et al.* *Phys. Rev.*, 1991;**A44**(3):2048
- 13 Agrawal GP, Fliytzannics C. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1981;**QE-17**(3):374
- 14 Asquini LM, Casagrande F. *Z. Phys.*, 1981;**B44**(3):233
- 15 Kaplan AE, Meystre P. *Opt. Commun.*, 1982;**40**(3):229
- 16 Mejias PM *et al.* *Phys. Rev.*, 1986;**A33**(3):1836
- 17 罗利国, 陈继述. *红外研究*, 1987;**6**(4):251
- 18 樊锡君, 田淑芬. *红外研究*, 1989;**8**(3):177
- 19 樊锡君等. *红外与毫米波学报*, 1991;**10**(3):193
- 20 Sandle WJ, Gallagher A. *Phys. Rev.*, 1981;**A24**(3):2017
- 21 Grant DE, Kimble JH. *Opt. Lett.*, 1982;**7**(4):353
- 22 Ballagh RJ *et al.* *Opt. Commun.*, 1981;**37**(2):143
- 23 Dummond PD. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1981;**QE-17**(3):301
- 24 Lugiato LA, Milani M. In *Proceedings of the Topical Meeting on Optical Bistability*; Rochester, N. Y. 1983, Edited by Bowden CM *et al.* (New York: Plenum, 1984), p.205

**ANALYSIS OF THE GENERAL RING CAVITY
BISTABLE SYSTEM IN THE DISPERSION
AND CAVITY DETUNING CASE**

FAN XIJUN, WANG XIANGTAI, YU LUOPING, TIAN SHUFEN

(Department of Physics, Shandong Normal University, Jinan, Shandong 250014, China)

Abstract: In this paper the steady state solutions of the general ring cavity bistable system in the dispersion and cavity detuning case are given, and the stationary properties of the system are analyzed. The difference between the ordinary ring cavity bistable system and the general ring cavity bistable system is pointed out in the pure absorption and resonance case.

Key words: general ring cavity, dispersion, detuning, optical bistability, instability.