

# 弯曲波纹圆波导中模式耦合系数的研究

李宏福 Manfred Thumm\*

(电子科技大学高能电子学研究所, 四川, 成都, 610054)

**摘要:** 分析了波纹圆波导中由曲率所引起的模式耦合问题. 从环形坐标系统中麦克斯韦方程出发导出了耦合系数的积分公式, 并进一步推导了各模式间耦合系数的显式.

**关键词:** 高功率毫米波, 传输线, 弯曲波纹波导, 模式耦合.

## 引言

波纹圆波导能传输  $TE_{0m}$ 、 $TM_{0m}$  以及非对称的  $HE_{nm}$  与  $EH_{nm}$  混合模. 其中平衡混合模  $HE_{11}$  具有损耗极低、线极化的横向电场、能产生旁瓣与横向极化很低的辐射图形等一系列优点, 因而过模的波纹圆波导在高功率毫米波传输系统及辐射系统等方面得到应用和重视<sup>[1,2]</sup>.

为了有效地使用波纹波导, 需要研究由于弯曲、直径变化等形变所引起的模式耦合问题. 光滑圆波导的弯曲问题大体上已得到解决<sup>[3,4]</sup>, 而弯曲波纹波导中的模式耦合问题还没有满意的结果<sup>[5]</sup>. 本文从环形坐标中麦克斯韦方程出发, 推导了模式耦合系数的积分公式, 经过运算, 导出了可能发生耦合的同向与反向模式之间耦合系数的显式.

## 1 波纹圆波导中的场

波纹直圆波导如图 1 所示. 当波导波长  $\lambda_g \gg L$  (实际上只需  $L$  略小于  $\lambda_g/2$  即可) 时, 系统中的空间谐波就可被忽略<sup>[5~8]</sup>, 本文就研究此种情况. 这时  $r = a$  的表面可视为具有各向异性表面阻抗的表面, 对各模式有<sup>[5]</sup>

$$Z_\varphi = E_\varphi / H_z = 0, \quad (1)$$

$$Z_z = -E_z / H_\varphi = jZ_0 Z, \quad (2)$$

式中  $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ ,  $Z$  可近似地表示为

$$Z = (W/L)\tan(kd), \quad (3)$$

本文 1991 年 6 月 18 日收到, 修改稿 1991 年 11 月 4 日收到.

\* Institut für Technische Physik, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe, Germany.

Z 的更精确表达式可从文献 [5, 6] 得到。

在边界条件式 (1) 与式 (2) 下, 可求得 (nm) 模横向场分布 (略去因子  $\exp[j(\omega t - \beta_{nm} z)]$ ):

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{nmt} = A_{nm} (R_{nm} Z_0)^{1/2} \mathbf{e}_{nm}(r, \varphi), \\ \mathbf{H}_{nmt} = A_{nm} (R_{nm} Z_0)^{-1/2} \mathbf{h}_{nm}(r, \varphi); \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{nm}(r, \varphi) = \nabla_{\perp} T_{nm} + d_{nm} \nabla_{\perp} T'_{nm} \times \mathbf{i}_z, \\ \mathbf{h}_{nm}(r, \varphi) = -\nabla_{\perp} T_{nm} \times \mathbf{i}_z + d_{nm} R_{nm}^2 \nabla_{\perp} T'_{nm}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} T_{nm} = N_{nm} J_n(X_{nm} r / a) \sin(n\varphi), \\ T'_{nm} = N_{nm} J_n(X_{nm} r / a) \cos(n\varphi); \end{cases} \quad (6)$$

其中  $R_{nm} = \beta_{nm} / k$ ,  $\beta_{nm}^2 = k^2 - k_{nm}^2$ ,  $k_{nm}^2 = (X_{nm} / a)^2$ ,  $d_{nm}$  是确定 TE 与 TM 波混合比例的系数, 它们为

$$\begin{cases} d_{nm} = \frac{n J_n(X_{nm})}{X_{nm} J'_n(X_{nm})} & n \neq 0, \\ d_{0m} = 1 & \text{TE}_{0m}, \\ d_{0m} = 0 & \text{TM}_{0m}; \end{cases} \quad (7)$$

而  $X_{nm}$  确定于

$$\begin{cases} \frac{X_{nm}^2}{n Z k a} + \frac{1}{d_{nm}} - d_{nm} R_{nm}^2 = 0, & n \neq 0 \\ Z k a J'_0(X_{0m}) + X_{0m} J_0(X_{0m}) = 0, & \text{TM}_{0m} \\ J'_0(X_{0m}) = 0. & \text{TE}_{0m} \end{cases} \quad (8)$$

$N_{nm}$  为正交归一化常数, 它确定于正交归一化条件

$$\iint_S [\mathbf{e}_{nm} \times (\mathbf{h}_{n'm'})^*]_z dS = \delta_{(nm)(n'm')} = \begin{cases} 1 & n = n' \text{ 与 } m = m', \\ 0 & n \neq n' \text{ 或 } m \neq m'. \end{cases} \quad (9)$$

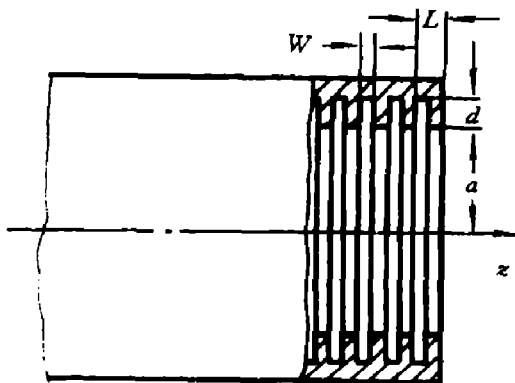


图 1 波纹直波导

Fig. 1 Straight corrugated waveguide

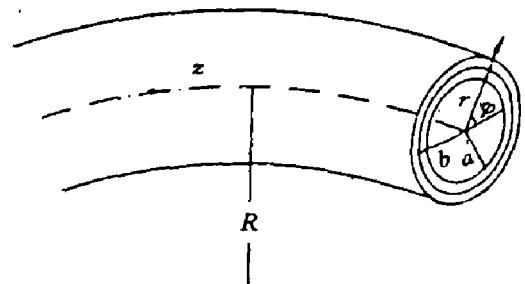


图 2 描述弯曲波纹波导的坐标系

Fig. 2 Coordinate system for description of corrugated waveguide with curvature

## 2 弯曲圆波纹波导中的模式耦合

我们研究轴线曲率半径为  $R$  的波纹圆波导, 采用正交环形坐标系统  $(u, v, \omega)$

$$\begin{cases} dS^2 = e_1^2 du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 d\omega^2 \\ u = r, v = \varphi, \omega = z; \\ e_1 = 1, e_2 = r, e_3 = 1 + \xi; \\ \xi = (r/R) \cos\varphi; \end{cases} \quad (10)$$

其坐标系统如图 2 所示. 将弯曲波纹波导中的场用直波纹波导中的场展开

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \sum_{nm} V_{nm} \mathbf{e}_{nm}(r, \varphi), \\ \mathbf{H}_t = \sum_{nm} I_{nm} \mathbf{h}_{nm}(r, \varphi), \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} E_\omega = j\omega\mu_0 \sum_{nm} I_{nm} \frac{k_{nm}^2}{k^2} T_{nm}, \\ H_\omega = j\omega\varepsilon_0 \sum_{nm} V_{nm} d_{nm} \frac{k_{nm}^2}{k^2} T'_{nm}. \end{cases} \quad (12)$$

由麦克斯韦方程和方程 (11) 与 (12), 并利用式 (9) 及  $V_{nm}$ 、 $I_{nm}$  与场幅值系数的关系, 得到耦合波方程

$$\frac{dA_{n'm'}^+}{dz} = -j\beta_{n'm'} A_{n'm'}^+ + \sum_{nm} [K_{(n'm')(nm)}^{++} A_{nm}^+ + K_{(n'm')(nm)}^{+-} A_{nm}^-], \quad (13)$$

$$\frac{dA_{n'm'}^-}{dz} = j\beta_{n'm'} A_{n'm'}^- + \sum_{nm} [K_{(n'm')(nm)}^{--} A_{nm}^- + K_{(n'm')(nm)}^{-+} A_{nm}^+]; \quad (14)$$

式中  $A_{nm}^+$ 、 $A_{nm}^-$  表示正向与反向传播的  $(nm)$  波的幅值,  $K_{(n'm')(nm)}^{++}$  表示正向传播的  $(nm)$  波到正向  $(n'm')$  波的耦合系数,  $K_{(n'm')(nm)}^{+-}$  表示反向  $(nm)$  波到正向  $(n'm')$  波的耦合系数, 其余类推, 它们满足

$$\begin{cases} K_{(n'm')(nm)}^{++} = -jC_{(n'm')(nm)}^{++}, \\ K_{(n'm')(nm)}^{+-} = -jC_{(n'm')(nm)}^{+-}, \\ K_{(n'm')(nm)}^{--} = jC_{(n'm')(nm)}^{--}, \\ K_{(n'm')(nm)}^{-+} = jC_{(n'm')(nm)}^{-+}; \end{cases} \quad (15)$$

式 (15) 中

$$C_{(n'm')(nm)}^{++} = C_{(n'm')(nm)}^{--} = \frac{k^2 A}{2\sqrt{\beta_{nm}\beta_{n'm'}}} + \frac{1}{2} \sqrt{\beta_{nm}\beta_{n'm'}} B, \quad (16)$$

$$C_{(n'm')(nm)}^{+-} = C_{(n'm')(nm)}^{-+} = -\frac{k^2 A}{2\sqrt{\beta_{nm}\beta_{n'm'}}} + \frac{1}{2} \sqrt{\beta_{nm}\beta_{n'm'}} B, \quad (17)$$

$$A = G_{H\xi} + \frac{\omega\mu_0}{ZZ_0} \frac{k_{nm}^2 k_{n'm'}^2}{k^4} \oint_c \xi T_{nm} T_{n'm'} dl - \frac{k_{nm}^2 k_{n'm'}^2}{k^2} \iint_s \xi T_{nm} T_{n'm'} dS, \quad (18)$$

$$B = G_{E\xi} - d_{nm} d_{n'm'} \frac{k_{nm}^2 k_{n'm'}^2}{k^2} \iint_s \xi T_{nm}' T_{n'm'}' dS, \quad (19)$$

$$G_{H\xi} = \iint_s \xi \left[ \left( \frac{\partial T_{nm}}{\partial r} + d_{nm} R_{nm}^2 \frac{\partial T_{nm}'}{r \partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial T_{n'm'}}{\partial r} + d_{n'm'} R_{n'm'}^2 \frac{\partial T_{n'm'}'}{r \partial \varphi} \right) + \left( \frac{\partial T_{nm}}{r \partial \varphi} - d_{nm} R_{nm}^2 \frac{\partial T_{nm}'}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial T_{n'm'}}{r \partial \varphi} - d_{n'm'} R_{n'm'}^2 \frac{\partial T_{n'm'}'}{\partial r} \right) \right] dS, \quad (20)$$

$$G_{E\xi} = \iint_s \xi \left[ \left( \frac{\partial T_{nm}}{\partial r} + d_{nm} \frac{\partial T_{nm}'}{r \partial \varphi} \right) \left( \frac{\partial T_{n'm'}}{\partial r} + d_{n'm'} \frac{\partial T_{n'm'}'}{r \partial \varphi} \right) + \left( \frac{\partial T_{nm}}{r \partial \varphi} - d_{nm} \frac{\partial T_{nm}'}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial T_{n'm'}}{r \partial \varphi} - d_{n'm'} \frac{\partial T_{n'm'}'}{\partial r} \right) \right] dS, \quad (21)$$

上面诸式给出了耦合系数的积分表达式。

### 3 模式耦合系数的表达式

要知道弯曲波纹波导中各模式间耦合的定量关系, 必须求解耦合波方程组 (13) 与 (14)。为此需要求出各个耦合系数的具体表达式。由耦合波理论可知<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} C_{(n'm')(nm)}^{++} = C_{(nm)(n'm')}^{++}, \\ C_{(n'm')(nm)}^{+-} = -C_{(nm)(n'm')}^{-+}, \\ C_{(n'm')(nm)}^{--} = C_{(nm)(n'm')}^{--}. \end{cases} \quad (22)$$

由式 (15)~(17) 与式 (22) 可见, 只需求出  $C_{(n'm')(nm)}^{++}$  与  $C_{(n'm')(nm)}^{+-}$  的表达式, 其余耦合系数便可求出。

由式 (6) 与 (16)~(21) 可见, 两个模式只有满足  $n' - n = \pm 1$  时, 两模式才能产生耦合。为不失问题的普遍性, 我们假定  $n' = n + 1$ 。

将式 (6) 代入式 (16)~(21), 经过一系列贝赛尔函数积分和变换得到如下一系列耦合系数的相关公式。

#### 3.1 非对称混合模之间的耦合

HE<sub>nm</sub> 或 EH<sub>nm</sub> 模与 HE<sub>n'm'</sub> 或 EH<sub>n'm'</sub> 之间耦合 ( $n \neq 0$ )

$$C_{(n'm')(nm)}^{++} = \frac{1}{4\sqrt{R_{nm} R_{n'm'}} D_{nm} D_{n'm'} (X_{n'm'}^2 - X_{nm}^2)^2 d_{nm} d_{n'm'} X_{nm} X_{n'm'}} \cdot \frac{ka}{R} F_{(n'm')(nm)}^{++} \operatorname{sgn}[J_n(X_{nm}) J_{n+1}(X_{n'm'})], \quad (23)$$

式 (23) 中

$$\operatorname{sgn}[J_n(X_{nm}) J_{n+1}(X_{n'm'})] = (-1)^{m+m'}, \quad (24)$$

$$D_{nm} = \frac{1}{2} \left\{ (1 + d_{nm}^2 R_{nm}^2) \left[ 1 - \frac{n^2}{X_{nm}^2} + \frac{n^2}{d_{nm}^2 X_{nm}^2} + \frac{2n}{d_{nm} X_{nm}^2} \right] - 2(1 + R_{nm}^2) d_{nm} \frac{n}{X_{nm}^2} \right\}, \quad (25)$$

$$F_{(n'm')(nm)}^{++} = R_{n'm'} X_{nm}^2 [2n(n+1)(1+d_{n'm'})(1-d_{nm}) + 2d_{nm} d_{n'm'} X_{n'm'}^2] \\ [R_{nm}(1+d_{nm} d_{n'm'} R_{n'm'}^2) \pm R_{n'm'}(1+d_{nm} d_{n'm'} R_{nm}^2)] \\ + n(n+1)(1+d_{n'm'})(1-d_{nm})(X_{n'm'}^2 - X_{nm}^2) [(1+d_{nm})(1+d_{n'm'}) \\ \cdot R_{nm} R_{n'm'} \pm (1+d_{nm} R_{nm}^2)(1+d_{n'm'} R_{n'm'}^2)] \pm d_{nm} d_{n'm'} X_{nm}^2 X_{n'm'}^2 \\ \cdot (R_{nm}^2 - R_{n'm'}^2) [(R_{nm} \pm R_{n'm'})(d_{nm} R_{nm} \pm d_{n'm'} R_{n'm'}) \\ + 1 \pm d_{nm} d_{n'm'} R_{nm} R_{n'm'}] \quad (26)$$

式中  $X_{nm}$ 、 $X_{n'm'}$  是方程 (8) 第一个方程的解, 对同一模式标号  $(nm)$ ,  $HE_{nm}$  与  $EH_{nm}$  模具有不同  $X_{nm}$  值.

### 3.2 $TE_{0m}$ 与 $HE_{1m}$ 或 $EH_{1m}$ 模耦合

$$C_{(1m')(0m)}^{++} = \frac{X_{0m} X_{1m'} (R_{0m} \pm R_{1m'})^2 (d_{1m'} R_{1m'} \pm (R_{0m} \mp R_{1m'}))}{2\sqrt{R_{0m} R_{1m'} D_{1m'} (X_{1m'}^2 - X_{0m}^2)^2}} \\ \cdot \frac{ka}{R} \operatorname{sgn}[J_0(X_{0m}) J_1(X_{1m'})] \quad (27)$$

式 (27) 中  $\operatorname{sgn}[J_0(X_{0m}) J_1(X_{1m'})] = (-1)^{m+m'+1}$ ,  $D_{1m'}$  确定于式 (25),  $m$  与  $m'$  为任意正整数,  $R$  为弯曲波纹波导轴线的曲率半径.

### 3.3 $TM_{0m}$ 模与 $HE_{1m}$ 或 $EH_{1m}$ 模耦合

$T_{1m'}$ 、 $T'_{1m'}$  由式 (6) 确定, 所对应的  $HE_{1m}$  与  $EH_{1m}$  模与  $TM_{0m}$  模不产生耦合. 如  $TM_{0m}$  模由函数  $T_{0m} = N_{0m} J_0(X_{0m})$  确定,  $HE_{1m}$  与  $EH_{1m}$  模所对应的  $T_{1m'}$ 、 $T'_{1m'}$  满足

$$\begin{cases} T_{1m'} = N_{1m'} J_1(X_{1m'} \frac{r}{a}) \cos \varphi, \\ T'_{1m'} = -N_{1m'} J_1(X_{1m'} \frac{r}{a}) \sin \varphi, \end{cases} \quad (28)$$

这样的  $HE_{1m}$ 、 $EH_{1m}$  模才能与  $TM_{0m}$  模产生耦合.  $HE_{1m}$  与  $EH_{1m}$  模各自的  $X_{1m'}$  由式 (8) 的第一个方程确定,  $TM_{0m}$  的  $X_{0m}$  由式 (8) 的第二个方程确定.  $TM_{0m}$  模与  $HE_{11}$  或  $EH_{11}$  模耦合, 其关系为

$$C_{(1m')(0m)}^{++} = \frac{-X_{0m} (R_{0m} \pm R_{1m'}) \operatorname{sgn}[J_0(X_{0m}) J_1(X_{1m'})]}{2\sqrt{R_{0m} R_{1m'} D_{0m} D_{1m'} (X_{1m'}^2 - X_{0m}^2)^2} d_{1m'} X_{1m'}} \cdot \frac{ka}{R} F_{(1m')(0m)}^{++}, \quad (29)$$

其中

$$F_{(1m')(0m)}^{++} = \left[ (1 + d_{1m'}) \frac{2X_{0m}^2}{Zka} - 2d_{1m'} X_{1m'}^2 \right] R_{1m'} \\ \pm (R_{0m} \mp R_{1m'}) (ka) \left[ \frac{1 + d_{1m'}}{Z} (1 + d_{1m'} R_{1m'}^2 \pm (1 + d_{1m'}) R_{0m} R_{1m'}) \right. \\ \left. - \frac{d_{1m'} X_{1m'}^2}{ka} (1 + d_{1m'} R_{1m'}^2 \pm d_{1m'} R_{0m} R_{1m'}) \right], \quad (30)$$

$$D_{0m} = 1 - (2 / Zka) + (X_{0m} / Zka)^2, \quad (31)$$

式中  $D_{1m}$  仍由式 (25) 确定,  $\text{sgn}[J_0(X_{0m})J_1(X_{1m})] = (-1)^{(m+m')}$ .

## 4 结语

在边界条件 (1) 与 (2) 下, 本文经过严格分析推导, 结果如下: (1) 从麦克斯韦方程出发导出了耦合系数的积分公式; (2) 给出了耦合系数之间的关系, 利用积分公式导出了  $TE_{0m}$ 、 $TM_{0m}$  对称模与非对称混合模之间, 以及各混合模之间同向传播与反向传播时耦合系数的表达式; (3) 在各耦合系数表达式中, 出现了因子  $\text{sgn}[J_n(X_{nm})J_{n+1}(X_{n'm'})]$ 、 $\text{sgn}[J'_n(X_{nm})J'_{n+1}(X_{n'm'})]$  等, 这些函数是确定耦合系数符号所必需的。

## 参考文献

- 1 Thumm M. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 1985,6(7):577
- 2 Thumm M. *International Journal of Electronics*, 1986,61,1135
- 3 Morgan SP. *The Bell System Technical Journal*, 1957,36:1209
- 4 Kumric H, Thumm M. *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 1986,7(10):1439
- 5 Doane JL. *Infrared and Millim. Waves*, Vol. 13, K J Button ed., Orlando: Academic, 1985, 123-170
- 6 Kerzhentseva NP. *Radio Engineering and Electronic Physics*, 1971,16:24
- 7 Clarricoats PJB et al. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineer*, 1975,122:1173
- 8 Dragone C. *The Bell System Technical Journal*, 1977,56:869
- 9 黄宏嘉. *微波原理 (卷 1)*, 北京, 科学出版社, 1965, 257
- 10 Henle W, Kumric H, Li H, Thumm M. In: K J Button, *Conference Digest of 15th Int. Conf. on Infrared and Millimeter Waves*, Orlando, 1990, 322

## STUDY ON MODE COUPLING COEFFICIENTS IN CURVED CORRUGATED CIRCULAR WAVEGUIDES

Li Hongfu, Manfred Thumm \*

(Institute of High Energy Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract:** Mode coupling due to curvature in circumferentially corrugated circular waveguides is analyzed in this paper. Starting from Maxwell's equations in the annular orthogonal curvilinear coordinate-system, the integral formulae for coupling coefficients are derived. On the basis of them, the explicit expressions of coupling coefficients between positive or opposite modes are derived.

**Key words:** high power millimeter waves, transmission line, curved corrugated waveguides, mode coupling.

\* Institut für Technische Physik, Kernforschungszentrum, Karlsruhe, Postfach 3640, D-7500 Karlsruhe, Germany.