

基于 MEI 方法的贴体 网格 FDTD 方法*

廖 成

(西南交通大学电磁场与微波技术研究所, 四川, 成都, 610031)

摘要 利用 Thompson 变换在任意形状的散射体外部产生共形的外部计算网格, 并使 FDTD 计算区域的截断边界与散射体边界形状完全一致, 时域不变性测试方程(MEI)方法被作为该截断边界上的局域吸收边界条件, 从而大大压缩了 FDTD 的计算空间. 数值试验结果证实, 该方法可在不降低计算精度的前提下减少计算机内存需求.

关键词 电磁散射, 时域有限差分法, Thompson-FDTD 方法, MEI 方法.

OBJECT-FITTED FDTD METHOD BASED ON MEI-ABC *

LIAO Cheng

(Electromagnetics Institute, Southwest Jiaotong University, Chengdu, Sichuan 610031, China)

Abstract The finite-difference time-domain (FDTD) computational zone was truncated by an artificial boundary, of which the geometric shape was conformal with the boundary of an arbitrary-shaped scatterer. The external conformal mesh was generated by the Thompson transformation. On the truncating boundary, the time domain measured equations of invariance (MEI) were applied as a local absorbing boundary condition. So the FDTD computational domain was compressed remarkably. The numerical experiment proved that the requirement of computer storage is reduced while the numerical accuracy is not decreased.

Key words EM scattering, FDTD method, Thompson-FDTD method, MEI method.

引言

时域有限差分法(FDTD)^[1]现已发展成为微波、毫米波理论和技术领域的重要数值计算方法. 绝大多数研究成果都集中在对边界问题的处理上, 有的是针对散射体边界的(包括所有非直角坐标 FDTD 方法和直角坐标 FDTD 的部分成果), 有的是针对开域问题中的截断边界的(包括所有类型的截断边界条件研究). 这自然由于 Maxwell 方程界定的定解问题本身就是一个边值问题, 而其现实的目的却是为了一个永恒的主题—试图解决或平衡所有数值模拟过程中都存在的计算精度和计算机内存、时间之间的矛盾.

考察 Thompson-FDTD 方法^[2]可以发现, 尽管

它通过对散射体和计算域的 Thompson 变换, 可以较好地处理不规则散射体边界的精确模拟问题^[3,4]; 并利用 Thompson 控制函数调节网格分布, 以非均匀网格分布实现了对截断边界的外推, 达到了改善计算精度、减小内存需求的目的^[5]. 但散射体外部的吸收网格数依然较多. 这是由于在 Thompson-FDTD 方法中采用的一致性圆形截断边界, 外部网格的部分就必然要从任意的散射体边界形状过渡到截断边界的圆形, 从而不可避免地引入了额外的外部网格. 即这些额外的外部网格与所采用的截断边界条件的类型、形状与阶数以及整个网格的部分方式有关. 时域 MEI 吸收边界条件的出现^[6,7]为解决这一问题提供方便, 使得在不降低计算精度的前提下减少外部吸收网格数目(降低对计算机内存的占

* 国家自然科学基金(编号 69971021)和国家“863”计划基金(编号 99-04)资助项目

稿件收到日期 2000-07-14, 修改稿收到日期 2000-11-29

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(No. 69971021) and by the Foundation of National “863” Plan (No. 99-04).

Received 2000-07-14, revised 2000-11-29

用)的目的有可能得以实现. 本文将在 Thompson-FDTD 方法中应用于散射体边界共形的截断边界, 并在散射体与截断边界之间生成共形外部网格, 应用时域 MEI 吸收边界条件实现对外行波的吸收, 从而进一步减少吸收网格数目.

1 MEI方法与Thompson-FDTD方法的结合

在 Thompson-FDTD 算法中应用 MEI 方法的可行性进行研究: 设有一任意形状的二维散射体置于自由空间中(见图 1). 在散射体表面 S_1 至其截断边界 S_2 之间的计算区域是用来实现散射场外行波吸收的区域(图 1 中有网格的区域 D), 以下简称外部区域或吸收区域. 而吸收区域的大小或吸收网格的多少将直接影响计算机内存占用的多少, 人们在算法优化时总是希望该区域越小越好. 但实际上有两个因素限制了对该区域的优化: 其一是由于吸收边界条件的精度总是随截断边界与散射体表面之间的距离增加而增加(不管是传统的 Mur 吸收边界条件 ABC^[8]、Bayliss 和 Turkel 的辐射边界条件 RBC^[9] 以及较优越的完全匹配层吸收边界条件 PML^[10] 皆是如此); 其二是引言中提及的截断边界的形状问题. 恰好 MEI 吸收边界条件的精度随截断边界的远近变化相对而言不是特别敏感, 这可部分解决第一个问题, 而 Thompson-FDTD 方法可以产生与散射体边界共形的外部网格和截断边界, MEI 吸收边界条件又可用于任意形状的截断边界, 它们的结合可以解决第二个问题.

图 1 中, 利用 Thompson-FDTD 变换可以把 xy 物理平面上不规则的区域 D 变换为 $\xi\eta$ 计算平面上的规则矩形区域. 在 xy 物理平面上形成图 1 所示的

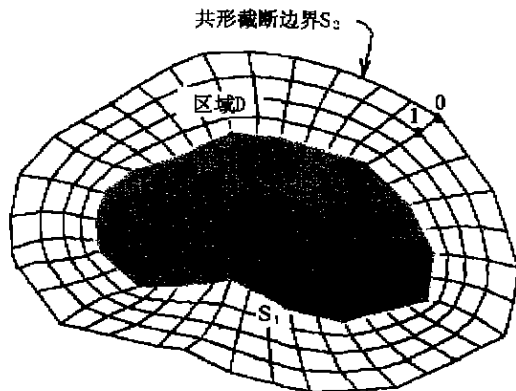


图 1 物理域中任意形状的散射体及其外部共形网格

Fig. 1 Geometry of an arbitrary cross-section scatterer and external conformal mesh in the physical domain

共形外部网格, 在计算平面上形成矩形网格(详见文献[2,3]). 该变换保证 xy 坐标与 $\xi\eta$ 坐标有一一对应的关系:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y), \\ \eta &= \eta(x, y).\end{aligned}\quad (1)$$

由于我们进行的仅是二组坐标系之间的变换, 因而对物理量没有影响; 设 xy 平面上某点 $P(x_0, y_0)$ 对应于到 $\xi\eta$ 平面的点 $P'(\xi_0, \eta_0)$, 则对任意物理量 f 有

$$f(\xi_0, \eta_0) = f(x_0, y_0).\quad (2)$$

由于式(1)和式(2)的限定, 使得我们可以在规则的 $\xi\eta$ 计算平面上完成 FDTD 计算, 并可将来计算结果按式的坐标点对应关系直接代回到物理域. 根据同样的理论, 也可以在 xy 物理平面上求出某一物理量, 再按式(2)将之代入到 $\xi\eta$ 计算平面上的相应点. 设图 1 中截断边界 S_2 上的某个点 0 处存在局域截断边界条件, 它由两个空间点 0 和 1 与两个时间步 n 和 $n+1$ 共同限定:

$$U_0^{n-1} = a_1 U_1^{n+1} + a_2 U_0^n + a_3 U_1^n,\quad (3)$$

式(3)中 U 为波函数, 其上标是时间步, 下标对应空间点, 系数 a_i ($i=1, 2, 3$) 是已经具体化的数值(即 MEI 系数). 那么式(3)中的系数和各点场值实际上都可以看成是具体的物理量, 于是就可以把式(3)直接应用于 $\xi\eta$ 计算平面上与图 1 中的点 0 和 1 相对应边界点上, 形成 Thompson-FDTD 方法中的截断边界条件, 而式(3)就是时域一阶 MEI 吸收边界条件^[6]. 这样, 我们可以把基于时域 MEI 吸收边界条件的共形 Thompson-FDTD 方法求解电磁散射问题的具体步骤概括如下.

(1) 设置外部截断边界, 对所考察的散射问题进行 Thompson 变换.

(2) 在 xy 物理平面上针对上述变换所形成的外部网格分布情况确定各截断边界格点的 MEI 系数.

(3) 将步骤 2 所得的 MEI 吸收边界条件式(3)应用到 $\xi\eta$ 计算平面上作为截断边界条件, 以 Thompson-FDTD 算法完成数值模拟.

步骤 1 的工作在文献[2]中已经完成, 步骤 3 的工作用式(3)的 MEI 吸收边界条件即可代替以前的 Bayliss-Turkel 一阶辐射边界条件, 所以下面仅对步骤 2 工作进行研究. 以图 1 中边界点 0 为例, 要完成对边界条件即 MEI 方程(3)的测试, 我们可以在散射体的边界格点上设置一组线电流源 $I_j(t)$ ($j=$

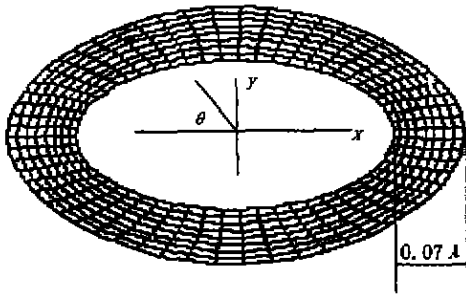


图 2 椭圆柱及其外部共形网格
Fig. 2 Geometry of an ellipse cylinder and external conformal mesh

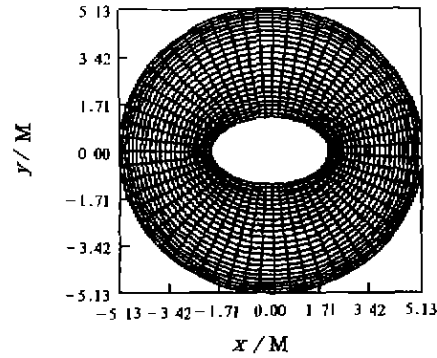


图 3 圆形截断边界的 Thompson 变换网格分布
Fig. 3 Mesh arrangement of Thompson transformation for a circle truncating boundary

1, 2, ... NX) 作为测试点. 那么在某时刻 n , 若由线电流源 $I_j(t)$ 在边界点 0 所产生的辐射场为 $U_0^s(j)$, 而该时刻在点 0 的总辐射场则为 NX 个线源辐射的叠加:

$$U_0^s = \sum_{j=1}^{NX} U_0^s(j), \quad (4)$$

有了不同时刻的 U_0^s 和 U_0^i , 将之代入式(3), 即可形成线性方程组, 求出该点的 MEI 系数 $a_i (i=1, 2, 3)$ 就完成了上述步骤 2.

2 数值实验

下面以两个无限长导体柱为例, 分别采用经典 Thompson-FDTD 方法(一致性圆形截断边界, Bayliss-Turkel 一阶辐射边界条件)和共形方法(共形截断边界, MEI 吸收边界条件)对它们进行计算, 并参照矩量法(MoM)^[11] 结果比较这两种方法在外部网格数量、内存需求、计算精度方面的差异.

设无限长椭圆形导体柱的横截面如图 2 所示, 长轴为 $a=2$, 短轴为 $b=1.2$, 入射的 TM 正弦平面

波频率取在 $ka=1$, 从图 2 中的负 x 轴方向垂直入射到柱体的左边界上. 用 Thompson 变换在导体柱外产生共形截断边界, 我们把共形截断边界放在距散射体相对较近的空间, 它与椭圆柱表面的距离为 0.07λ , 其 Thompson 变换所产生的网格在物理平面上的分布如图 2 所示. 在导体表面的周向格点间距平均约为 $\lambda/60$, 总的网格数为 60×9 (周向 \times 径向). 由此网格分布及其时域时间步向间隔为基础可以计算出截断边界各格点的 MEI 系数, 得到式(3)的 MEI 吸收边界条件, 将之应用到 $\xi\eta$ 计算平面上之后由 Thompson-FDTD 方法即可完成时域迭代并提取出表面电流密度和雷达散射截面(RCS)等数据.

当我们采用圆形截断边界时, 由于要完成从椭圆形网格到圆形网格的过渡并结合考虑一阶 Bayliss-Turkel 的辐射边界条件的具体要求, 就需把截断边界放在距散射体较远的空间并划分较多的外部网格, 其 Thompson 变换所产生的网格在物理平面上的分布如图 3 所示. 圆形截断边界与椭圆柱

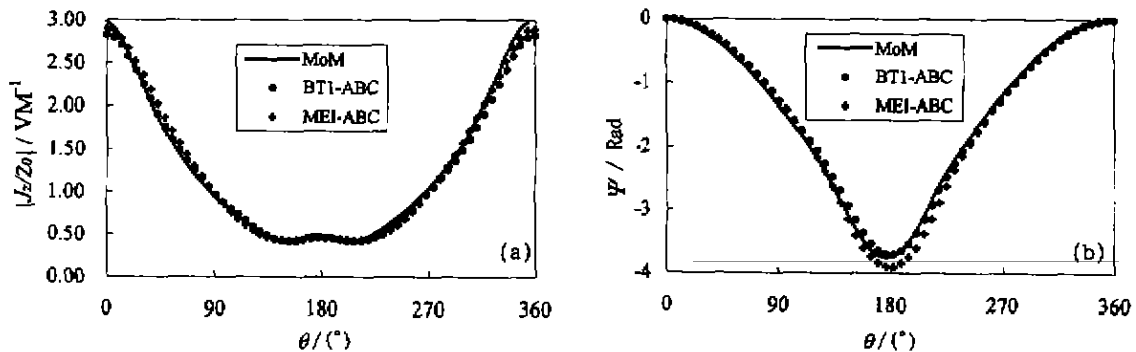


图 4 椭圆柱的表面电流密度曲线
(a) 表面电流密度的振幅 (b) 表面电流密度的相位
Fig. 4 The surface current density for the ellipse cylinder
(a) amplitude of the surface current density (b) phase of the surface current density

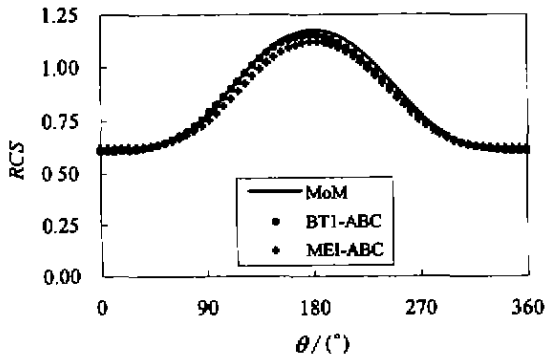


图 5 椭圆柱的相对 RCS 曲线
Fig. 5 Normalized RCS of the ellipse cylinder

的最短距离为 0.25λ ，在导体表面的周向格点间距平均约为 $\lambda/60$ ，总的网格数为 60×24 。计算由 Thompson-FDTD 方法完成。

图 4 和图 5 分别给出了椭圆柱表面电流和相对 RCS 的计算结果，其中表面电流密度 J_x 用自由空间波阻抗 Z_0 进行归一化，相对 $RCS = \sqrt{RCS}/\lambda$ 。图 4 和图 5 中实线为 MoM 的计算结果，O 标志为圆形截断边界 Bayliss-Turkel 一阶辐射边界条件的 Thompson-FDTD 方法结果，+ 标志为共形截断边界 MEI 吸收边界条件的 FDTD 结果。从图 4 和图 5 计算结果可见，尽管共形截断边界距离散射体近得多，所涉及的外部网格数目也少得多（见图 2），但其计算精度与矩量法所得的解已相当接近，并与用图 3 的较大计算域、圆形截断边界的情况基本一致。即在同等精度条件下，本文的共形 Thompson-FDTD 方法将比原方法节约更多的计算机内存，减少了运行时间。

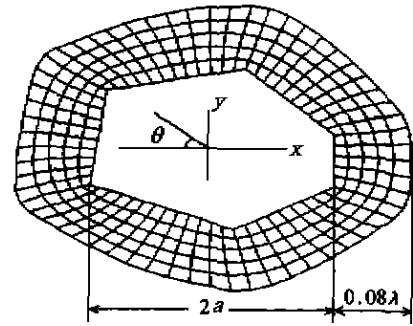


图 6 任意柱体 A 的外部共形网格
Fig. 6 The external conformal mesh of the arbitrary cylinder A

对更一般情形，考虑具有任意形状横截面的无限长导体柱。用自编的“2D Thompson-FDTD”软件，我们可以用鼠标器在计算机屏幕上信手画一个封闭的二维图形 A，假定这就是无限长导体柱的横截面。利用 TM 正弦平面波从导体的左侧入射，该任意形体截面的最大宽度为 $2a$ ，入射波频率取为 $ka = 1$ ，分别用距散射体边界距离为 0.08λ 的共边界和 0.3λ 圆形边界截断计算空间，以 Thompson 变换产生的共形计算网格如图 6 所示。共形边界情况的网格数为 60×6 ，圆形截断边界的网格数为 60×24 。

用 Thompson-FDTD 方法加 MEI 吸收边界条件对图 6 的情形进行计算，用 Bayliss-Turkel 一阶辐射边界条件对圆形截断边界的情况进行求解，时域计算时间均止于三个正弦周期。这两种方法计算出的表面电流和 RCS 数据如图 7 所示，图 7 中角度 θ 的定义和图例与上述椭圆柱情况一致。显然，这两种方法对任意形体 A 的计算结果是极其相似的，都

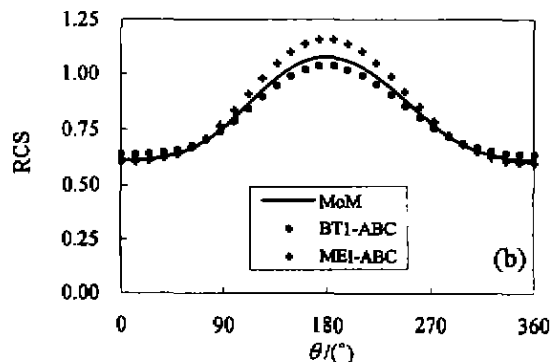
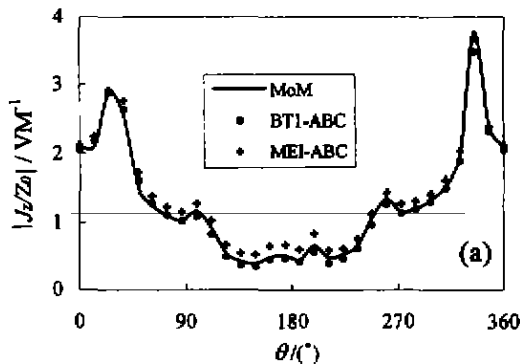


图 7 任意柱体 A 的表面电流和 RCS
(a) 表面电流密度振幅 (b) 相对 RCS
Fig. 7 The surface current and normalized RCS of cylinder A
(a) amplitude of the surface current (b) normalized RCS

与传统的矩量法结果非常接近,而采用共形网格方法却可以减少4倍的计算机内存需求,这两种方法对任意形体计算结果的一致性再次得到了验证,相近的计算精度,不同的计算网格数,采用共形截断边界及MEI边界条件的优越性是不言而喻的。

4 结语

本文已经成功地将时域MEI吸收边界条件应用在Thompson-FDTD方法中,采用了共形截断边界来截断FDTD的计算区域,可以说是压缩了时域有限差分区域,达到了在保证数值模拟精度的基础上节约计算机内存、减少计算时间的目的,但把时域MEI方法作为局域截断边界条件的研究才刚刚开始,还远未达到完善的程度,更高阶的MEI吸收边界条件在适合任意形状边界情况的同时,必将进一步减少FDTD中的外部吸收网格,减少计算量,提高计算效率。

REFERENCES

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. on AP.*, 1966, **14**: 302—307
- [2] LIAO Cheng, REN L. FDTD technique combined with Thompson transformation to analyze electromagnetic scattering of complex objects. *Acta Electronica Sinica* (廖成,任朗. 时域有限差分技术结合Thompson变换计算复杂形体的电磁散射问题. *电子学报*), 1998, **26**(9): 96—99
- [3] Liao Cheng, Deng Y, Ren L. Numerical solution for EM scattering about arbitrary two-dimensional bodies using Thompson-FDTD method. *Microwave & Opt. Tech. Lett.*, 1996, **13**(4): 233—236
- [4] LIAO Cheng, REN L. Comparison of Thompson-FDTD method and canonical FDTD method. *Chinese Journal of Radio Science* (廖成,任朗. Thompson-FDTD与经典FDTD方法之比较. *电波科学学报*), 1997, **12**(4): 356—360
- [5] LIAO Cheng, JEN L, LIU Y. Implement technique of absorption boundary condition in Thompson-FDTD method. *J. Electromag. Wave and Applica.*, 1998, **12**(7): 927—935
- [6] Liu Y, Liao Cheng, Lan K, et al. Absorbing boundary conditions for measured equation of invariance in time domain. *IEEE AP-s.*, 1998, **39**: 1050—1053
- [7] Liu Y, Lan K, Liao Cheng. Time-domain MEI method for radiation of line source. *Electron. Lett.*, 1999, **35**(4): 284—285
- [8] Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations. *IEEE Trans. on EMC.*, 1981, **23**: 377—382
- [9] Bayliss A, Furkel E. Radiation boundary condition for wave-like equations. *Commun., Pure & Appl. Math.*, 1980, **33**: 707—725
- [10] Berenger P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. of Computational Phys.*, 1994, **114**: 185—200
- [11] Harrington R F. *Field Computation by Moment Methods*. Malabar: Krieger, 1982, 28—143